ALGEBRA 1, Lista 9

Konwersatorium 1.12.2021 i Ćwiczenia 21.12.2021.

0S. Materiał teoretyczny: Pierścień (przemienny, z jedynką), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedzina, ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedzina jest ciałem. Wyliczenie, które pierścienie $\mathbb{Z}_n$ są ciałami. Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady. Produkt pierścieni. Izomorfizm pierścieni $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$, gdy m i n są względnie pierwsze.

1S. Sprawdzić, czy poniższe $(A, \oplus, \odot)$ są pierścieniami:
   (a) $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, $a \oplus b = a+b$, $a \odot b = ab$ (dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych);
   (b) $A = \mathbb{R}$, $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$, $a \odot b = a \cdot b$;
   (c) $A = \mathbb{R}_{>0}$, $a \oplus b = a \cdot b$, $a \odot b = a^b$.

2S. Niech R będzie pierścieniem $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.
   (a) Napisać tabelki działań w pierścieniu R.
   (b) Wskazać dzielniki zera i elementy odwracalne w pierścieniu R.

3S. Określić działania $\oplus$ i $\odot$ w zbiorze $\mathbb{Z}$ tak, by $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ był pierścieniem i funkcja

$$f : (\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \to (\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad f(x) = x + 1$$

była izomorfizmem. Wskazać jedynkę i zero pierścienia $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

4K. Które z poniższych pierścieni są dziedzinami, a które ponadto są ciałami?
   (a) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ (z działaniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych).
   (b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
   (c) $\mathbb{Z}_4$.
   (d) $\mathbb{Z}_5$.
   (e) $\mathbb{Z}_6$.
   (f) $\mathbb{Z}[i]$.
   (g) $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (z działaniami dodawania i mnożenie liczb zespolonych).
   (h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

5K. Znaleźć wszystkie homomorfizmy $f : R \to S$ pierścieni z jedynką R i S (uwaga: zgodnie z definicją, $f(1_R) = 1_S$), dla:
   (a) $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}_6$;
   (b) $R = \mathbb{Z}_{15}$, $S = \mathbb{Z}_3$;
   (c) $R = \mathbb{Z}_7$, $S = \mathbb{Z}_4$;
   (d) $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z}$;
   (e) $R = \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Q}$.

6. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w następujących pierścieniach:
   (a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$;
   (b) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$;
   (c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$;

7. Niech $+, \cdot$ będą działaniami określonymi w zbiorze A. Wiadomo, że $(A, +)$ jest grupą, zaś działanie $\cdot$ jest łączne, rozdzielne względem $+$ i ma element neutralny $1 \in A$. Wykazać, że wtedy $(A, +, \cdot)$ jest pierścieniem. (Wskazówka: wystarczy udowodnić przemienność $+$. W tym celu wymnożyć na dwa sposoby $(1 + 1)(a + b)$ i porównać wyniki.)

8. Załóżmy, że $(R, +, \cdot)$ jest pierścieniem, w którym grupa addytywna $(R, +)$ jest cykliczna. Udowodnić, że R jest przemienny.

9. Załóżmy, że w pierścieniu R mamy $a^2 = a$ dla wszystkich $a \in R$.
   (a) Udowodnić, że $a + a = 0$ dla wszystkich $a \in R$ (wskazówka: rozważyć $(a + a)^2$).
   (b) Udowodnić, że R jest przemienny (wskazówka: rozważyć $(a + b)^2$).
10. Niech $C(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z działaniami
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
   (a) Czy funkcja $f(x) = x$ jest odwracalna w pierścieniu $C(\mathbb{R})$? Czy jest dzielnikiem zera?
   (b) Podać przykład funkcji odwracalnej w $C(\mathbb{R})$, różnej od funkcji stale równej jeden (jedynki pierścienia $C(\mathbb{R})$).
   (c) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są odwracalne?
   (d) Podać przykład funkcji w $C(\mathbb{R})$, która jest dzielnikiem zera w $C(\mathbb{R})$.
   (e) Które funkcje w $C(\mathbb{R})$ są dzielnikami zera?