

ALGEBRA 1, Lista 14

Konwersatorium 23.01.2024 i 29.01.2024.

- 0S. Materiał teoretyczny: Ideały maksymalne oraz związek pomiędzy ideałami maksymalnymi i ciałami. Charakterystyka ciała i podciała. Równania algebraiczne w ciele F , znajdowanie rozwiązań w rozszerzeniu K ciała F . Ciało algebraicznie domknięte: definicja, istnienie (informacyjnie) i nieskończoność. Ciała proste. Podciała proste ciała F . Liczba elementów ciała skończonego. Funkcja Frobeniusa w ciele charakterystyki $p > 0$.
- 1S. Sporządzić tabelki działań ciała:
- (a) 4-elementowego,
 - (b) 9-elementowego.
- 2K. Które z podanych pierścieni są ciałami?
- (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
 - (b) \mathbb{Z}_4 .
 - (c) \mathbb{Z}_{17} .
 - (d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 3)$.
 - (e) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.
 - (f) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2 + 1)$.
 - (g) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 7)$.
 - (h) $M_n(\mathbb{R})$, $n > 1$.
- 3K. Omówić twierdzenie Bézout(a) dla pierścienia wielomianów nad dowolnym pierścieniem przemiennym z 1.
- 4K. Rozwiązać równanie kwadratowe $x^2 + x + 1 = 0$:
- (a) w ciele \mathbb{Z}_7 ;
 - (b) w ciele \mathbb{Z}_5 ;
 - (c) w ciele liczb rzeczywistych;
 - (d) w ciele liczb zespolonych.
- 5K. Załóżmy, że F jest ciałem oraz $I \trianglelefteq F$. Udowodnić, że $I = \{0\}$ lub $I = F$.
- 6K. Załóżmy, że $f : F_1 \rightarrow F_2$ jest homomorfizmem ciał. Udowodnić, że f jest monomorfizmem.
- 7K. Załóżmy, że R niezerowym pierścieniem przemiennym z 1 oraz ideał $I \triangleleft R$ jest taki, że $I \neq R$. Mówimy, że ideał I jest *pierwszy*, gdy dla wszystkich $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$ pociąga, że $a \in I$ lub $b \in I$. Udowodnić, że:
- (a) ideał I jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień R/I jest dziedziną;
 - (b) jeśli I jest maksymalny, to I jest pierwszy.
- 8K. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $W \in \mathbb{R}[X]$ oraz $W(z) = 0$. Udowodnić, że:
- (a) wielomian
$$X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) = (X - z)(X - \bar{z})$$
dzieli W w pierścieniu $\mathbb{R}[X]$;
 - (b) $W(\bar{z}) = 0$.
- Wskazówka: podzielić z resztą.