

## ALGEBRA 1, Lista 4

Konwersatorium 24.10.2023, Ćwiczenia 27.10.2023.

Niech  $G$  będzie grupą,  $g \in G$ ,  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  oraz  $n \in \mathbb{N}_{>1}$ .

- 0S. Materiał teoretyczny: Warstwy lewostronne i warstwy prawostronne podgrupy  $H$  grupy  $G$ . Własności warstw. Indeks podgrupy  $H$  w grupie  $G$ . Twierdzenie Lagrange'a oraz wnioski z niego. Małe twierdzenie Fermata. Twierdzenie Wilsona.
- 1S. Wyznaczyć wszystkie możliwe:
- (a) rzędy elementów  $g \in \mathbb{Z}_{20}$ ;
  - (b) rzędy elementów  $g \in S_5$ ;
  - (c) rzędy elementów  $g \in D_6$ .
- 2S. Załóżmy, że  $\text{ord}(g) = 10$ . Wyznaczyć  $\text{ord}(g^2)$ ,  $\text{ord}(g^5)$ ,  $\text{ord}(g^3)$ .
- 3S. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów)  $G/H$  i  $H \backslash G$ , dla:
- (a)  $G = S_3$ ,  $H = \{\text{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ ;
  - (b)  $G = \mathbb{Z}$ ,  $H = 5\mathbb{Z}$ .
- 4K. Załóżmy, że  $\text{ord}(g) = n$  i niech  $r = r_n(k)$ .
- (a) Udowodnić, że  $g^k = g^r$ .
  - (b) Udowodnić, że  $\text{ord}(g^k) = l$ , gdzie  $l$  jest najmniejszą liczbą  $\geq 1$  taką, że  $n|kl$ .
  - (c) Udowodnić, że

$$\text{ord}(g^k) = \frac{n}{\text{NWD}(k, n)}.$$

- (d) Udowodnić, że  $\text{ord}(g^k) = n$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $k$  i  $n$  są względnie pierwsze.
- 5K. Wyznaczyć wszystkie możliwe rzędy elementów  $g \in D_n$ .

6. Niech

$$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n \mid \text{NWD}(k, n) = 1\}.$$

Udowodnić, że:

- (a) mnożenie modulo  $n$  (oznaczane  $\cdot_n$ ) jest działaniem na  $\mathbb{Z}_n^*$ ;
  - (b)  $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$  jest grupą (łącznie  $\cdot_n$  była omówiona na wykładzie).
7. Opisać zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych (przez wypisanie wszystkich jego elementów)  $G/H$  i  $H \backslash G$ , dla:
- (a)  $G = \mathbb{Z}_{12}$ ,  $H = \{0, 6\}$ ;
  - (b)  $G = D_4$ ,  $H = \{\text{id}, O_{\pi/2}, O_{\pi}, O_{3\pi/2}\}$ ;
  - (c)  $G = D_4$ ,  $H = \{\text{id}, S\}$ , gdzie  $S$  jest dowolną symetrią osiową;
  - (d)  $G = S_n$ ,  $H = A_n$ , gdzie  $A_n$  to zbiór permutacji parzystych w  $S_n$  (udowodnić, że  $A_n$  jest podgrupą  $S_n$ !).
8. Załóżmy, że  $G$  jest generowana przez zbiór  $\{g, h\} \subseteq G$  taki, że  $\text{ord}(g) = 5$ ,  $\text{ord}(h) = 4$  oraz  $gh = hg^2$ .
- (a) Niech  $K = \langle g \rangle$  oraz  $H = \langle h \rangle$ . Udowodnić, że  $K \cap H = \{e\}$ .
  - (b) Udowodnić, że każdy element grupy  $G$  jest postaci  $g^i h^j$  dla pewnych  $0 \leq i < 5$  oraz  $0 \leq j < 4$  oraz udowodnić, że to przedstawienie jest jednoznaczne. Ile elementów ma grupa  $G$ ?
  - (c) Napisać wzór na iloczyn elementów grupy  $G$  zapisanych w postaci  $g^i h^j$  jak w punkcie (b) powyżej.
9. Obliczyć następujące reszty z dzielenia:

$$r_{13}(125^{342}), r_{29}(321^{485}), r_{31}(321^{485}).$$