ALGEBRA 1, Lista 5

Ćwiczenia 3.11.2023, Konwersatorium 7.11.2023.

0S. Materiał teoretyczny: Homomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, endomorfizmy i automorfizmy grup: definicje i przykłady. Twierdzenie Cayley'a. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Dzielnik normalny.

1S. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfimem.

2S. Udowodnić, że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

3S. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \leqslant S_G$.

4K. Załóżmy, że G, H są grupami oraz grupa G jest cykliczna, skończona i generowana przez element a. Załóżmy, że $b \in H$ oraz $\mathrm{ord}(b)$ jest skończony i dzieli $\mathrm{ord}(a)$. Udowodnić, że:
   (a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$;
   (b) każdy endomorfizm $\mathbb{Z}_n$ jest postaci:
$$\varphi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad \varphi_k(x) = k \cdot_n x;$$
   dla pewnego $k \in \mathbb{Z}_n$.

5K. Załóżmy, że G jest grupą cykliczną, nieskończoną i generowaną przez element a, H jest dowolną grupą oraz $b \in H$. Udowodnić, że:
   (a) istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$;
   (b) każdy endomorfizm $\mathbb{Z}$ jest postaci:
$$\psi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad \psi_k(x) = kx;$$
   dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

6. Czy istnieją poniższe homomorfizmy grup $f : G \to H$? Jeśli istnieją, to wyznaczyć obraz i jądro danego homomorfizmu.
   (a) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ f(1) = 1$.
   (b) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}_2, +_2),\ f(1) = 1$.
   (c) $G = H = (\mathbb{R}, +),\ f(1) = 99$.
   (d) $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot),\ H = (\mathbb{R}, +),\ f(8) = 3$.
   (e) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot),\ f(1) = 2$.
   (f) $G = (\mathbb{Z}_4, +_4),\ H = (\mathbb{Z}_5, +_5),\ f(1) = 1$.

7. Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy $f : G \to H$, gdzie:
   (a) $G = (\mathbb{Z}, +),\ H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$;
   (b) $G = (\mathbb{Z}_3, +_3),\ H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$;
   (c) $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10}),\ H = (\mathbb{Z}_6, +_6)$;
   (d) $G = H = (\mathbb{Q}, +)$.

8. Czy następująca podgrupa H grupy G jest dzielnikiem normalnym?
   (a) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, O_{\pi/2}, O_\pi, O_{3\pi/2}\}$.
   (b) $G = D_4,\ H = \{\mathrm{id}, O_\pi\}$.
   (c) $G = S_4,\ H = \{\mathrm{id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$.

9. Niech
$$H := \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \subset S_4.$$
   Udowodnić, że:
   (a) H jest podgrupą S_4;
   (b) H jest dzielnikiem normalnym w S_4 (wskazówka: dla $\sigma \in S_4$ opisać $\sigma(1,2)(3,4)\sigma^{-1}$ i następnie skorzystać z odpowiedniego kryterium na dzielnik normalny z wykładu).