

## ALGEBRA 1, Lista 8

Konwersatorium 28.11.2023. Na Kolokwium 2 (1.12.2023) obowiązują listy zadań 1.–7.

0S. Automorfizmy wewnętrzne grup: definicja, własności i przykłady. Grupa  $\text{Inn}(G)$  automorfizmów wewnętrznych grupy  $G$ , związek z centrum grupy  $Z(G)$ . Relacja sprzężenia w grupie  $G$ . Opis relacji sprzężenia w przypadku grup permutacji.

1S. W dowolnej grupie  $G$  udowodnić, że dla danego  $a \in G$  zbiór

$$C(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$$

jest podgrupą grupy  $G$  (zwaną *centralizatorem* elementu  $a$  w grupie  $G$ ).

2K. Niech  $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5) \in S_5$ .

(a) Wypisać wszystkie permutacje  $\tau$  w grupie  $S_5$ , które są sprzężone z permutacją  $\sigma$ . Za każdym razem wskazać permutację  $f$  taką, że  $\tau = \varphi_f(\sigma)$  (przypomnienie:  $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ ).

(b) Znaleźć zbiór wszystkich permutacji w  $S_5$ , które są przemiennie z permutacją  $\sigma$  (wskazówka:  $\tau$  jest przemienna z  $\sigma \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$ ).

3K. Załóżmy, że grupa  $G$  ma jedyną podgrupę  $H$  rzędu 25. Udowodnić, że  $H \trianglelefteq G$ . (wskazówka: dla  $g \in G$ , rozważyć podgrupę  $\varphi_g(H) \leq G$ ).

4K. W następujących grupach  $G$  opisać klasy sprzężenia:

- (a)  $G = Q_8$ ;
- (b)  $G = D_3$ ;
- (c)  $G = D_4$ .