Skończone schematy grupowe, Lista 1

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, G grupą, P zbiorem częściowo uporządkowanym i $\mathcal{C}$ kategorią.

1. Udowodnić, że obiekty początkowe i końcowe w $\mathcal{C}$ są jedyne z dokładnością do izomorfizmu (jeśli istnieją).
2. Znaleźć obiekty początkowe i końcowe (lub udowodnić ich nieistnienie) w następujących kategoriach: $\mathbf{Mod}_K$, $\mathbf{Alg}_K$, $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{AfVar}_K$, G traktowana jako kategoria i P traktowany jako kategoria.
3. Znaleźć sensowną intepretację funktorów z P (traktowanego jako kategoria) w $\mathcal{C}$. Można zacząć od
$$P = \{a, b, c, d\}; \qquad a < b, a < c, b < d, c < d.$$
4. Udowodnić, że zdefiniowana na wykładzie kolekcja funkcji liniowych $V \to V^{**}$ jest morfizmem funktorów
$$\mathrm{id}_{\mathbf{Mod}_R} \to **\,.$$
5. Dokończyć dowód podpunktu (3) ostatniego twierdzenia z wykładu.
6. Niech F będzie funktorem a f morfizmem. Pokazać, że:
   (a) Jeśli f jest izomorfizmem, to $F(f)$ jest izomorfizmem.
   (b) Jeśli F jest wiernie pełny, to f jest izomorfizmem $\Leftrightarrow$ $F(f)$ jest izomorfizmem.
   (c) Podać przykład wiernego funktora F i morfizmu f takiego, że $F(f)$ jest izomorfizmem, ale f nie jest izomorfizmem.
   (d) Podać przykład pełnego funktora F i morfizmu f takiego, że $F(f)$ jest izomorfizmem, ale f nie jest izomorfizmem.
7. Podać przykład funktora $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ takiego, że dla każdego $G \in \mathbf{Grp}$, $F(G) = G$ i F nie jest funktorem identycznościowym.
8. Pokazać, że złożenie morfizmów funktorów jest morfizmem funktorów.
9. Niech V będzie rozmaitością afiniczną nad K. Udowodnić, że przyporządkowanie
$$\mathbf{Alg}_K \ni R \mapsto V(R) \in \mathbf{Set}$$
jest funktorem reprezentowalnym (tzn. funktorem izomorficznym z funktorem h_S dla pewnej K-algebry S), gdzie $V(R)$ oznacza zbiór punktów R-wymiernych V (tzn. zbiór rozwiązań nad R układu równań wielomianowych definiujących V).