Skończone schematy grupowe, Lista 2

Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, R pierścieniem oraz $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ niech będą kategoriami.

1. Niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami i $f : F \to G$ będzie morfizmem funktorów. Udowodnić, że f jest izomorfizmem funktorów wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \in \mathcal{C}$ morfizm $f_X : F(X) \to G(X)$ jest izomorfizmem.

2. Udowodnić, że funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy F jest wiernie pełny i dla każdego $Y \in \mathcal{D}$, istnieje $X \in \mathcal{C}$, taki że $Y \cong F(X)$.

3. Skonstruować produkty i koprodukty (jeśli istnieją) w następujących kategoriach: **Grp**, $\mathbf{Mod}_R$, $\mathbf{Alg}_R$, **Set**, kategoria pochodząca od P oraz kategoria, której obiektami są podzbiory ustalonego zbioru X a morfizmy to inkluzje.

4. Udowodnić, że funktory reprezentowalne zachowują produkty i obiekty końcowe.

5. Niech $\mathbf{Ab}^f$ będzie kategorią skończonych grup abelowych. Pokazać, że kategoria $\mathbf{Ab}^f$ jest równoważna z kategorią $(\mathbf{Ab}^f)^{\mathrm{op}}$.

6. Pokazać, że kategorie $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ i $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}})$ są izomorficzne.

7. Udowodnić równoważność dwóch definicji produktu z wykładu.

8. Zdefiniować (sensownie!) kategorię $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

9. Udowodnić istnienie funktorialnego izomorfizmu (w kategorii $\mathcal{C}$, która ma produkty)
$$X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z.$$
Obie strony powyżej rozumiemy jako funktory z kategorii $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ w kategorię **Set**.

10. Niech $X \in \mathcal{C}$. Udowodnić, że X jest grupą w kategorii $\mathcal{C}$ (bądź też kogrupą w kategorii $\mathcal{C}$) wtedy i tylko wtedy, gdy funktor h^X (bądź też funktor h_X) jest funktorem w kategorię **Grp**.

11. Udowodnić, że grupy w kategorii **Grp** odpowiadają dokładnie grupom przemiennym.