Skończone schematy grupowe, Lista 3

Niech k będzie pierścieniem, Γ przemienną grupą skończoną oraz $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami.

1. Udowodnić, że morfizm koprzekątnej w kategorii $\mathbf{Alg}_k$ to mnożenie na k-algebrze.

2. Udowodnić, że diagramy z wykładu definiujące algebry Hopfa odpowiadają diagramom definiującym kogrupy w $\mathbf{Alg}_k$.

3. Znaleźć 3 diagramy z definicji grupy (kogrupy) w kategorii z wykładu, których przemienność implikuje przemienność pozostałych dwóch.

4. Zdefiniować kategorię $\mathbf{Grp}_{\mathcal{C}}$ ($\mathbf{CoGrp}_{\mathcal{C}}$) grup (kogrup) w $\mathcal{C}$.

5. Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będzie funktorem zachowującym produkty i obiekty końcowe (zakładamy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ mają produkty i obiekty końcowe). Udowodnić, że F zadaje funktor z $\mathbf{Grp}_{\mathcal{C}}$ do $\mathbf{Grp}_{\mathcal{D}}$.

6. Zdefiniować kategorię $\mathbf{Hopf}_k$.

7. Udowodnić, że odpowiednie algebry Hopfa z wykładu zadają funktory $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ i $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

8. Zdefiniować algebrę Hopfa zadającą funktor GL_n.

9. Udowodnić, że odpowiednie algebry Hopfa z wykładu zadają funktory $\mu_{n,k}$ i $\alpha_{p^n,k}$.

10. Udowodnić, że jeśli Γ jest nietrywialna, to nie istnieje funktor reprezentowalny
$$F : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp}$$
taki, że dla każdej k-algebry R mamy $F(R) = \Gamma$.

11. Udowodnić, że $(k^\Gamma, m, \varepsilon, \iota)$ z wykładu jest algebrą Hopfa.

12. Niech R będzie k-algebrą bez idempotentów (poza 0 i 1). Udowodnić, że
$$\underline{\Gamma}_k(R) \cong \Gamma.$$