Skończone schematy grupowe, Lista 4

Niech k będzie pierścieniem.

1. Niech M będzie skończenie generowanym projektywnym k-modułem. Udowodnić, że
   (a) moduł M^* jest skończenie generowany i projektywny,
   (b) naturalne odwzorowanie $M \to M^{**}$ jest izomorfizmem.

2. Udowolnić, że moduł dualny do algebry Hopfa jest algebrą Hopfa (uzupełnić dowód z wykładu).

3. Niech A będzie algebrą Hopfa nad k i R będzie k-algebrą.
   (a) Dla dwóch homomorfizmów k-algebr $f, g : A \to R$ zdefiniować ich produkt.
   (b) Udowodnić, że jeśli A i R są przemiennymi algebrami Hopfa i f, g są morfizmami algebr Hopfa, to powyższy produkt jest również morfizmem algebr Hopfa.

4. Niech G będzie schematem grupowym zadanym przez grupową algebrę Hopfa $k[\mathbb{Z}]$. Udowodnić, że
$$G \cong \mathbb{G}_{\mathrm{m},k}.$$

5. Udowodnić, że
$$(\alpha_{p,\mathbb{F}_p})^* \cong \alpha_{p,\mathbb{F}_p}.$$

6. Niech $(A, m, \varepsilon, \iota)$ będzie algebrą Hopfa nad k definiującą schemat grupowy G. Udowodnić, że elementy "group-like" A odpowiadają morfizmom schematów grupowych $G \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},k}$.

7. Niech Γ będzie grupą przemienną i załóżmy, że k nie ma idempotentów (poza 0 i 1). Udowodnić, że Γ (jako podzbiór $k[\Gamma]$) pokrywa się z elementami "group-like" algebry Hopfa $k[\Gamma]$.