Skończone schematy grupowe, Lista 5

Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz $\mathcal{C}$ kategorią z produktami włóknistymi.

1. Opisać monomorfizmy i epimorfizmy w następujących kategoriach:

$$\mathrm{Set},\ \mathrm{Mod}_k,\ \mathrm{Alg}_k,\ \mathrm{Grp},\ \mathrm{Top},\ \mathrm{TopHausdorff},\ \mathrm{AfVar}_k,$$

   kategoria pochodząca od grupy oraz kategoria pochodząca od porządku częściowego.

2. Niech G będzie obiektem grupowym w $\mathcal{C}$ działającym na $X \in \mathcal{C}$ oraz $X \to Y$ będzie kategoryjnym ilorazem. Udowodnić istnienie i jedyność morfizmu $\lambda' : G \times X \to X \times_Y X$ z wykładu.

3. Opisać działania schematów grupowych $\mu_{p,\mathbb{F}_p},\ \alpha_{p,\mathbb{F}_p}$.

4. Niech schemat grupowy $G = \mathrm{Spec}(A)$ działa na schemacie afinicznym $\mathrm{Spec}(R)$ poprzez $d : R \to A \otimes R$. Definiujemy

$$B := \{r \in R \mid d(r) = 1 \otimes r\}.$$

   Udowodnić, że:

   (a) Morfizm $X \to \mathrm{Spec}(Y)$ (dany przez inkluzję $B \to R$) jest kategoryjnym ilorazem.

   (b) Funkcja d jest B-liniowa.

5. Udowodnić, że

   (a) $\{F \in k[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n] \mid F(TX_1, \ldots, TX_n) = F\} = k[\frac{X_2}{X_1}, \ldots, \frac{X_n}{X_1}]$

   (b) Morfizm $U \to \mathrm{Spec}(k[\frac{X_2}{X_1}, \ldots, \frac{X_n}{X_1}])$ jest dobrym ilorazem działania $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ na U z wykładu.

6. Załóżmy, że kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są równoważne. Udowodnić, że kategorie $\mathrm{Grp}_\mathcal{C}$ i $\mathrm{Grp}_\mathcal{D}$ są rónoważne.

7. Niech $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{AfVar}_k}(V, W)$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.

   (a) Morfizm f jest domkniętym włożeniem.

   (b) Zbiór $f(V)$ jest domknięty Zariskiego w W oraz $f : V \cong f(V)$.