

Skończone schematy grupowe, Lista 6

Niech k będzie ciałem oraz \mathcal{C} i \mathcal{D} kategoriami.

1. Załóżmy, że A jest skończoną k -algebrą, $f : C \rightarrow D$ homomorfizmem k -algebr oraz $\Psi : A \otimes_k C \rightarrow A \otimes_k C$ automorfizmem C -algebr. Udowodnić, że:
 - (a) pierścień A jest semi-lokalny,
 - (b) $N_C \circ (\text{id}_A \otimes f) = f \circ N_D$,
 - (c) $N_C \circ \Psi = \Psi$.
2. Załóżmy, że \mathcal{C} ma obiekt końcowy i produkty. Udowodnić, że:
 - (a) Kategoria $\text{Grp}_{\mathcal{C}}$ ma obiekt zerowy.
 - (b) Jeśli \mathcal{C} ma produkty włókniste, to $\text{Grp}_{\mathcal{C}}$ ma produkty włókniste.
3. Załóżmy, że \mathcal{C} ma obiekt zerowy i funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii. Udowodnić, że F przenosi jądra na jądra i kojądra na kojądra.
4. Niech (G, μ) będzie obiektem grupowym w \mathcal{C} . Udowodnić, że morfizm
$$(\mu, \pi_2) : G \times G \rightarrow G \times G$$
jest izomorfizmem w \mathcal{C} .
5. Załóżmy, że \mathcal{C} jest addytywna oraz $f : X \rightarrow Y$ i $k : K \rightarrow X$ są morfizmami w \mathcal{C} . Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) Morfizm k jest jądrem f .
 - (b) Dla każdego $Z \in \mathcal{C}$ poniższy ciąg homomorfizmów grup abelowych jest dokładny
$$0 \rightarrow \text{Hom}(Z, K) \rightarrow \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, Y).$$
6. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie morfizmem w \mathcal{C} i załóżmy, że \mathcal{C} ma obiekt zerowy. Udowodnić, że:
 - (a) Jeśli f jest monomorfizmem, to morfizm $0 \rightarrow X$ jest jądrem f .
 - (b) Jeśli \mathcal{C} jest addytywna i morfizm $0 \rightarrow X$ jest jądrem f , to f jest monomorfizmem.Sformułować analogiczne fakty dla kojądra f .
7. Zbadać addytywność kategorii $\text{AbGrp}_{\mathcal{C}}$.
8. Załóżmy, że $\text{char}(k) = p > 0$ i rozważmy morfizmy $\text{Fr}_{\mathbb{G}_a} : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ oraz $\text{Fr}_{\mathbb{G}_m} : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$. Znaleźć ich jądra i kojądra w kategorii grup algebraicznych nad k i w kategorii schematów grupowych nad k .