Algebra 2B, Lista 11

Niech K będzie ciałem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $f \in \mathbb{C}[X]$ będzie stopnia 2. Udowodnić, że istnieje $z \in \mathbb{C}$ taki, że $f(z) = 0$.

2. Niech $\mathbb{Q} \subseteq L$ będzie rozszerzeniem Galois zawartym w $\mathbb{C}$ takim, że $[L : \mathbb{Q}]$ jest nieparzysty. Udowodnić, że $L \subseteq \mathbb{R}$.

3. Niech L będzie ciałem rozkładu nad K wielomianu nierozkładalnego f stopnia 3.

   (a) Udowodnić, że $G(L/K)$ jest izomorficzna z jedną z następujących grup: $S_3, (\mathbb{Z}_3, +_3), S_1$.

   (b) Znaleźć K i f dla każdej z trzech grup występujących w (a).

4. Niech L będzie ciałem rozkładu wielomianu X^4+X^2-6 nad $\mathbb{Q}$. Znaleźć $G(L/\mathbb{Q})$.

5. Niech $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1, 1\}$ będzie bezkwadratowa i p będzie liczbą pierwszą. Niech L będzie ciałem rozkładu $X^p - d$ nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że grupa $G(L/\mathbb{Q})$ jest rozwiązalna rzędu $p(p-1)$.

6. Niech p_n będzie n-tą liczbą pierwszą (czyli $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ itd.). Udowodnić, że:

   (a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$.

   (b) $G(\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}_2, +)^n$.

   (c) Jeśli $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_{>1}$ są parami różne i bezkwadratowe, to liczby $\sqrt{k_1}, \ldots, \sqrt{k_n} \in \mathbb{R}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$.

   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1} + \ldots + \sqrt{p_n})$.