Algebra 2B, Lista 12

Niech K będzie ciałem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Wskazać $z \in \mathbb{C}$ takie, że rozszerzenie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(z)$ jest Galois oraz $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ jest izomorficzna z:
   (a) $(\mathbb{Z}_2, +)^2 \times (\mathbb{Z}_4, +)$.
   (b) $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_4, +)^2$.
   (c) $(\mathbb{Z}_2, +)^3 \times (\mathbb{Z}_3, +)$.
   (d) $(\mathbb{Z}_3, +)$.

2. Udowodnić, że istnieje rozszerzenie Galois $\mathbb{Q} \subseteq K$ takie, że $G(K/\mathbb{Q})$ jest izomorficzna z:
   (a) $(\mathbb{Z}_p, +)$, gdzie p jest liczbą pierwszą.
   (b) $(\mathbb{Z}_n, +)$ (dowód może wymagać skorzystania z twierdzenia, które wykracza poza ramy tego wykładu).

3. Załóżmy, że K zawiera pierwotny n-ty pierwiastek z 1. Weźmy $a \in K^{\mathrm{alg}}$ taki, że $a^n \in K$. Udowodnić, że:
   (a) Rozszerzenie $K \subseteq K(a)$ jest Galois.
   (b) Grupa $G(L/K)$ jest izomorficzna z podgrupą $(\mathbb{Z}_n, +)$.

4. Niech $f \in K[X]$. Udowodnić, że jeśli f jest względnie pierwszy z f', to f jest rozdzielczy.

5. Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem Galois i $G(L/K) = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Definiujemy
$$T = \phi_1 + \ldots + \phi_n : L \to L.$$
   Udowodnić, że:
   (a) Dla każdego $a \in L$ mamy $T(a) \in K$.
   (b) Istnieje $a \in L$ taki, że $T(a) = 1$.

6. Udowodnić, że $r_n(r_n(K)) = r_n(K)$ i $r(r(K)) = r(K)$.

7. Udowodnić, że jeśli $a \in r_2(K)$, to $[K(a) : K]$ jest potęgą 2.

8. Udowodnić, że jeśli n jest liczbą złożoną, to $r_n(K) = r_{n-1}(K)$.