**Algebra 2B, Lista 13**

Niech $K$ będzie ciałem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Załóżmy, że $G$ jest skończoną grupą rozwiązalną, której rząd jest liczbą złożoną. Udowodnić, że $G$ nie jest prosta.

2. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ i niech $f = X^6 + aX^3 + b \in K[X]$. Udowodnić, że pierwiastki $f$ wyrażają się przez pierwiastniki nad $K$.

3. Niech
$$f := a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in K[X],$$
gdzie $a_n \neq 0$ i $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ oraz $n \leqslant 9$, to pierwiastki $f$ wyrażają się przez pierwiastniki nad $K$.

4. Udowodnić, że jeśli $K$ jest skończone, to każdy element algebraiczny nad $K$ wyraża się przez pierwiastniki nad $K$.

5. Udowodnić, że wielomiany symetryczne $s_1, \ldots, s_n$ nad $K$ są algebraicznie niezależne nad $K$.

6. Niech $K \subseteq L \subseteq M$, $K \subseteq L' \subseteq M$ będą wieżami ciał takimi, że rozszerzenia $K \subseteq L$, $K \subseteq L'$ są normalne. Udowodnić, że rozszerzenie $K \subseteq LL'$ jest normalne.

7. Udowodnić, że:

   (a) $\langle (12), (12 \ldots n) \rangle = S_n$.

   (b) Jeśli $n$ jest liczbą pierwszą, to dla każdego $n$-cyklu $\tau \in S_n$ i każdej transpozycji $\sigma \in S_n$ mamy $\langle \sigma, \tau \rangle = S_n$.