Algebra 2B, Lista 2

Niech K będzie ciałem, R pierścieniem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $f \in K[X]$ i $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Udowodnić, że f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $Z(f) = \emptyset$.

2. Załóżmy, że R jest UFD. Niech $f = a_n X^n + \ldots + a_0 \in R[X]$, gdzie $a_n \neq 0$. Załóżmy, że p jest elementem pierwszym pierścienia R oraz:

$$p|a_0,\ p|a_1,\ \ldots\ ,\ p|a_{n-1},\ p \nmid a_n,\ p^2 \nmid a_0.$$

   Udowodnić, że f jest nierozkładalny w $K[X]$, gdzie K jest ciałem ułamków R (*kryterium Eisensteina*).

3. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że $1 + X + \ldots + X^{p-1}$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X]$.

4. Niech $\varepsilon_n \in \mathbb{C}$ będzie taki, że $\varepsilon_n^n = 1$ i dla każdego $0 < i < n$ mamy $\varepsilon_n^i \neq 1$. Znaleźć $\deg_{\mathbb{Q}}(\varepsilon_n)$ dla:
   (a) $n = p$: liczba pierwsza,
   (b) $n = 6$,
   (c) $n = 8$.

5. Udowodnić, że $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[n]{2}) = n$.

6. Znaleźć $f \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $f(\sqrt[3]{3}) = (\sqrt[3]{3})^{-1}$.

7. Znaleźć $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

8. Udowodnić, że $[\mathbb{R}(X) : \mathbb{R}(X^n)] = n$.

9. Niech $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ będzie normą euklidesową spełniającą dla każdych $a, b \in R$ nierówność $v(a) \leqslant v(ab)$, I będzie niezerowym ideałem pierwszym w R oraz $r \in I$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) $(r) = I$,
   (b) r jest nierozkładalny,
   (c) $v(r) = \min\{v(a) \mid a \in I \setminus \{0\}\}$.