Algebra 2B, Lista 3

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał.

1. Udowodnić, że $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$. Czy ta sama metoda dowodu działa dla $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$?

2. Udowodnić, że $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{3} + \sqrt{3}) = 6$.

3. Podać przykład $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ takich, że $\deg_{\mathbb{Q}}(a) = 2, \deg_{\mathbb{Q}}(b) = 3$ oraz

   (a) $\deg_{\mathbb{Q}}(ab) = 3$,

   (b) $\deg_{\mathbb{Q}}(ab) = 6$.

   Czy możliwa jest sytuacja, że $\deg_{\mathbb{Q}}(ab) = 2$?

4. Udowodnić, że jeśli $[L : K]$ jest liczbą pierwszą, to dla każdego $a \in L \backslash K$ mamy $L = K(a)$.

5. Niech $a, b \in L$ będą algebraiczne nad K. Udowodnić, że jeśli $\deg_K(a)$ i $\deg_K(b)$ są względnie pierwsze, to
$$[K(a, b) : K] = \deg_K(a) \deg_K(b).$$

6. Udowodnić, że jeśli $a \in L$ oraz $\deg_K(a)$ jest liczbą nieparzystą, to $K(a) = K(a^2)$. Czy zachodzi twierdzenie odwrotne?

7. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{char}(K) \neq 2$ i $[L : K] = 2$, to istnieje $a \in L$ taki, że $a^2 \in K$ oraz $L = K(a)$. Czy twierdzenie to jest prawdziwe jeśli $\mathrm{char}(K) = 2$?

8. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że liczba $a + bi$ jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są algebraiczne.

9. Udowodnić, że jeśli $a \in \mathbb{Q}$, to $\sin(a\pi)$ oraz $\cos(a\pi)$ są liczbami algebraicznymi.

10. Niech $Q \subseteq K$ będzie rozszerzeniem ciał. Udowodnić, że
$$G(K/\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}(K).$$

11. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.

12. Niech $a \in L$ będzie przestępny nad K i $f \in K(X) \setminus K$. Udowodnić, że $f(a)$ jest przestępny nad K.

13. Udowodnić, że ciało algebraicznie domknięte jest nieskończone.