Algebra 2B, Lista 4

Niech R będzie pierścieniem UFD, $K = R_0$ i $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał.

1. Niech $f \in K[X] \setminus \{0\}$ i $a \in K \setminus \{0\}$. Udowodnić, że:
   (a) $f \in R[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{cont}(f) \in R$,
   (b) $\mathrm{cont}(af) = a\,\mathrm{cont}(f)$,
   (c) Jeśli $f \in R[X]$, to
   $$\mathrm{cont}(f) = \mathrm{NWD}(a_0, \ldots, a_n),$$
   gdzie $f = a_n X^n + \ldots + a_0$.

2. Załóżmy, że $f, g \in R[X] \setminus \{0\}$ i $\mathrm{cont}(f) = \mathrm{cont}(g) = 1$. Udowodnić, że $\mathrm{cont}(fg) = 1$.

3. Niech $f, g \in R[X]$ oraz $\mathrm{cont}(f) = 1$. Udowodnić, że $f|g$ w $R[X]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f|g$ w $K[X]$.

4. Niech $R \subseteq S$ będzie rozszerzeniem pierścieni i $b \in S$. Powiemy, że b jest *całkowity nad* R gdy istnieje wielomian unormowany $f \in R[X]$ taki, że $f(b) = 0$. Niech $a \in L$. Udowodnić, że (cały czas zakładamy, że R jest UFD!):
   (a) Element a jest całkowity nad R wtedy i tylko wtedy, gdy a jest algebraiczny nad K i $f_a \in R[X]$, gdzie f_a to wielomian minimalny a nad K.
   (b) Jeśli $a \in K$ jest całkowity nad R, to $a \in R$.
   (c) Jeśli $f = \sum a_i X^i \in R[X]$ jest wielomianem unormowanym, $a \in K$ oraz $f(a) = 0$, to $a \in R$ i $a|a_0$ w R.

5. Niech S będzie R-algebrą, $s \in S$ i $\varphi : R[X] \to S$ homomorfizmem R-algebr. Udowodnić, że jeśli $\varphi(X) = s$, to $\varphi = \mathrm{ev}_s$.