Algebra 2B, Lista 5

Niech $K \subseteq L \subseteq M$ będzie wieżą ciał.

1. Załóżmy, że M jest algebraicznie domknięte, $f \in K[X] \backslash K$ i $\{a_1, \ldots, a_n\}$ jest zbiorem wszystkich pierwiastków f w M. Udowodnić, że L jest ciałem rozkładu f nad K wtedy i tylko wtedy, gdy $L = K(a_1, \ldots, a_n)$.

2. Niech $K \subseteq L'$ będzie rozszerzeniem ciał takim, że $L \cong_K L'$. Udowodnić, że $G(L/K) \cong G(L'/K)$.

3. Dla każdego $f \in K[X]$ wprowadźmy nową zmienną X_f. Niech
$$R = K[X_f]_{f \in K[X]},$$
$$I = (\{f(X_f) \mid f \in K[X] \setminus K\}) \trianglelefteq R.$$
Udowodnić, że $I \neq R$.

4. Udowodnić, że K_1 otrzymane indukcyjnie w pierwszym kroku dowodu odpowiedniego twierdzenia z wykładu jest algebraicznym domknięciem ciała K.

5. Dowieść, że ciałem rozkładu wielomianu $X^4 - 2$ nad $\mathbb{Q}$ jest $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$.

6. Załóżmy, że $[L : K] = 2$. Dowieść, że L jest ciałem rozkładu pewnego $f \in K[X]$.

7. Niech L będzie ciałem rozkładu $f \in K[X]$ i $\deg(f) = n$. Dowieść, że $[L : K] \leqslant n!$.

8. Znaleźć przykład nierozkładalnego wielomianu $f \in \mathbb{Q}[X]$ oraz parami różnych $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ takich, że $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$ ale $\mathbb{Q}(a_1, a_2) \ncong \mathbb{Q}(a_1, a_3)$.

9. Znaleźć algebraicznie domknięte ciało K takie, że dla każdego $a \in K$ istnieje skończone podciało $F \subset K$ takie, że $a \in F$.

10. Udowodnić, że dla każdego $F \in \mathbb{F}_p[X]$ mamy $F(X^p) = F(X)^p$.