Algebra 2B, Lista 6

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał, $A \subseteq L$, $a, b \in L$ i $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech R będzie dziedziną i $\varphi : R \to K$ homomorfizmem. Udowodnić, że φ przedłuża się do homomorfizmu $R_0 \to K$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest monomorfizmem.

2. Udowodnić, że jeśli $a_1, \dots, a_n \in L$ są algebraicznie niezależne nad K, to
$$K(X_1, \dots, X_n) \cong_K K(a_1, \dots, a_n).$$

3. Udowodnić, że jeśli $K \subseteq L$ jest czysto przestępne, to dla każdego $x \in L \setminus K$, element x jest przestępny nad K.

4. Załóżmy, że $a \notin A$. Udowodnić, że $A \cup \{a\}$ jest algebraicznie niezależny nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebraicznie niezależny nad K i a jest przestępny nad $K(A)$.

5. Udowodnić, że A jest bazą przestępną L nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebraicznie niezależny nad K oraz rozszerzenie $K(A) \subseteq L$ jest algebraiczne.

6. *Twierdzenie Steinitza o wymianie dla algebraicznego domknięcia* Udowodnić, że jeśli a jest algebraiczny nad $K(A \cup \{b\})$ i przestępny nad $K(A)$, to b jest algebraiczny nad $K(A \cup \{a\})$.

7. Niech K' będzie ciałem i $\varphi : K \to K'$ izomorfizmem. Udowodnić, że istnieje rozszerzenie ciał $K' \subseteq L'$ oraz izomorfizm $\psi : L \to L'$ rozszerzający φ.

8. Udowodnić, że jeśli M jest ciałem i $\varphi : K \to M$ izomorfizmem, to φ przedłuża się do izomorfizmu pomiędzy K^{alg} i M^{alg}.

9. Niech $K \subseteq L'$ będzie rozszerzeniem ciał, takim że
$$\operatorname{trdeg}_K L = \operatorname{trdeg}_K L'.$$
Udowodnić, że jeśli L i L' są algebraicznie domknięte, to $L \cong_K L'$.

10. Załóżmy, że $|L| > |K| \geqslant \aleph_0$. Udowodnić, że $\operatorname{trdeg}_K L = |L|$.

11. Udowodnić, że jeśli L i L' są nieprzeliczalnymi, algebraicznie domkniętymi ciałami tej samej charakterystyki i tej samej mocy, to $L \cong L'$.

12. Udowodnić, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje przeliczalnie wiele przeliczalnych ciał algebraicznie domkniętych.

13. Udowodnić, że $|\operatorname{Aut}(\mathbb{C})| = |\mathbb{C}^{\mathbb{C}}|$.