Algebra 2B, Lista 7

Niech p będzie liczbą pierwszą, $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, F_n wielomianem minimalnym $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ nad $\mathbb{Q}$ i K ciałem.

1. Niech R będzie pierścieniem charakterystyki p. Udowodnić, że dla każdych $a, b \in R$ mamy $(a+b)^p = a^p + b^p$.

2. Udowodnić, że dla każdego $f = a_0 + \ldots + a_n X^n \in K[X]$, jeśli $a_n \neq 0$, to:
$$f = a_n \prod_{a \in K^{\mathrm{alg}}} (X-a)^{\mathrm{mlt}_f(a)},$$
gdzie $\mathrm{mlt}_f(a) = 0$, jeśli $f(a) \neq 0$.

3. Niech $\varphi(n) := |\mathbb{Z}_n^*|$. Udowodnić, że:
   (a) $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.
   (b) Jeśli $(n, m) = 1$, to $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

4. Rozłożyć $(\mathbb{Z}_{2^n})^*$ na produkt grup cyklicznych.

5. Następujące wielomiany rozłożyć nad $\mathbb{Q}$ na iloczyn wielomianów nierozkładalnych:
   (a) $X^8 - 1$,
   (b) $X^{12} - 1$,
   (c) $X^{16} - 1$.

6. Napisać jawnie (tzn. podając współczynniki całkowite) następujące wielomiany (odpowiedzi uzasadnić!):
   (a) F_6,
   (b) F_{10},
   (c) F_{15},
   (d) F_{p^2},
   (e) F_{p^n},
   (f) F_{2p}.