Algebra 2B, Lista 8

Niech $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ i $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał.

1. Znaleźć przykład rozszerzenia ciał $K \subseteq L$ takiego, że dla każdego elementu $a \in L \setminus K$, a jest przestępny nad K, ale rozszerzenie $K \subseteq L$ nie jest czysto przestępne.

2. Znaleźć przykład rozszerzenia ciał $K \subseteq L$ takiego, że nie istnieje wieża ciał $K \subseteq M \subseteq L$ taka, że rozszerzenie $K \subseteq M$ jest algebraiczne i rozszerzenie $M \subseteq L$ jest czysto przestępne.

3. Udowodnić, że ciało liczb rzeczywistych nie jest rozszerzeniem czysto przestępnym żadnego swojego właściwego podciała.

4. Określić stopień przestępny L nad K dla nastepującego rozszerzenia. Czy jest one czysto przestępne?

   (a) $K = \mathbb{R}(X+Y),\ L = \mathbb{R}(X,Y)$;

   (b) $K = \mathbb{R}(X^2, Y+Z),\ L = \mathbb{R}(X,Y,Z)$;

   (c) $K = \mathbb{R}(X^2+Y^2+Z^2),\ L = \mathbb{R}(X,Y,Z)$.

5. Niech K będzie skończone i $f \in K[X]$ będzie nierozkładalny. Udowodnić, że wszystkie pierwiastki f (w K^{alg}) są jednokrotne.

6. Podać przykład K i wielomianu nierozkładalnego $f \in K[X]$, który ma tylko pierwiastki wielokrotne (w K^{alg}).

7. Udowodnić, że istnieje monomorfizm $\mathbb{F}_{p^m} \to \mathbb{F}_{p^n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m|n$.

8. Używając monomorfizmów z poprzedniego zadania przyjmijmy, że mamy ciąg rozszerzeń ciał:

$$\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^2} \subset \mathbb{F}_{p^6} \subset \ldots \subset \mathbb{F}_{p^{n!}} \subset \ldots$$

   Udowodnić, że ciało $\bigcup_n \mathbb{F}_{p^{n!}}$ jest algebraicznym domknięciem $\mathbb{F}_p$.