Algebra 2B, Lista 9

Niech $K \subseteq L \subseteq M$ będzie wieżą ciał i p liczbą pierwszą.

1. Załóżmy, że $K \subseteq M$ jest algebraiczne. Udowodnić, że każdy homomorfizm $L \to K^{\mathrm{alg}}$ nad K przedłuża się do homomorfizmu $M \to K^{\mathrm{alg}}$.
2. Załóżmy, że $K \subseteq L$ jest skończone. Udowodnić, że $K \subseteq L$ jest normalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f \in K[X]$ taki, że L jest ciałem rozkładu f nad K.
3. Udowodnić, że każde rozszerzenie stopnia 2 jest normalne.
4. Znaleźć K, L, M takie, że:
   (a) Rozszerzenie $K \subseteq M$ jest normalne, ale $K \subseteq L$ nie jest normalne.
   (b) Rozszerzenia $K \subseteq L, L \subseteq M$ są normalne, ale $K \subseteq M$ nie jest normalne.
5. Dla $f, g \in K[X]$ udowodnić, że:
   (a) $(f+g)' = f' + g'$,
   (b) $(fg)' = f'g + fg'$,
   (c) $f(g)' = f'(g)g'$.
6. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p$ i niech $f \in K[X]$. Udowodnić, że $f' = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in K[X]$ taki, że $f = g(X^p)$.
7. Znaleźć $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ takie, że:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\alpha)$,
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\beta)$,
   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - i, \sqrt{3} + i) = \mathbb{Q}(\gamma)$.
8. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p$. Udowodnić, że nie istnieje $\alpha \in K(X,Y)$ taki, że:
$$K(X^p, Y^p)(\alpha) = K(X, Y).$$