Algebra 2B, Lista 1

Niech K będzie ciałem, R pierścieniem i $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $f \in R[X] \setminus \{0\}$. Udowodnić, że jeśli R jest dziedziną, to mamy
$$|\{r \in R \mid f(r) = 0\}| \leqslant \deg(f).$$
2. Znaleźć przykład R i $f \in R[X]$ takiego, że $\deg(f) = 1$ i f ma nieskończenie wiele pierwiastków.
3. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = n$. Udowodnić, że istnieje najmniejsze podciało $F \subseteq K$ (F nazywamy *podciałem prostym* K) oraz, że:
   (a) jeśli n jest liczbą pierwszą, to $F \cong \mathbb{F}_n$,
   (b) jeśli $n = 0$, to $F \cong \mathbb{Q}$.
4. Udowodnić, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.
5. Niech $z \in \mathbb{C}$. Udowodnić, że z jest liczbą algebraiczną wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{z}$ (liczba sprzężona) jest liczbą algebraiczną.
6. Niech $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ będzie normą euklidesową spełniającą dla każdych $a, b \in R \setminus \{0\}$ nierówność $v(a) \leqslant v(ab)$, I będzie niezerowym ideałem pierwszym w R oraz $x \in I$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) $(x) = I$,
   (b) x jest nierozkładalny,
   (c) $v(x) = \min\{v(a) \mid a \in I \setminus \{0\}\}$.
7. Niech $\mathbb{Q} \subseteq K$ będzie rozszerzeniem ciał. Udowodnić, że
$$G(K/\mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}(K).$$
8. Udowodnić, że $G(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \varphi\}$, gdzie φ jest sprzężeniem zespolonym.
9. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.
10. Niech $a \in L$ będzie przestępny nad K i $f \in K(X) \setminus K$.
    (a) Zdefiniować $\mathrm{Dom}(f) \subseteq L$ i funkcję $f : \mathrm{Dom}(f) \to L$.
    (b) Udowodnić, że $a \in \mathrm{Dom}(f)$ oraz że $f(a)$ jest przestępny nad K.