Algebra 2B, Lista 11

Niech $R \subseteq S$ będzie rozszerzeniem pierścieni (przemiennych z 1), $n \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz dla $i = 1, \ldots, n$; s_i jest i-tym wielomianem symetrycznym n zmiennych nad R.

1. Udowodnić, że pierścień wielomianów symetrycznych n zmiennych nad R pokrywa się z $R[s_1 \ldots, s_n]$.

2. Udowodnić, że jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ takie, że
$$f := (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n) \in R[X]$$
oraz F jest wielomianem symetrycznym n zmiennych o współczynnikach z R, to $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R$.

3. Niech $F \in R[X_1 \ldots, X_n]$ oraz $F = f_0 + \ldots + f_N$, gdzie f_j jest wielomianem jednorodnym stopnia j. Udowodnić, że F jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego j, f_j jest symetryczny.

4. Niech $f \in R[X_1 \ldots, X_n]$.
   (a) Udowodnić, że jeśli f jest jednorodny stopnia n, to dla każdego $r \in R$ mamy równość wielomianów
   $$f(rX_1, \ldots, rX_n) = r^n f(X_1, \ldots, X_n).$$
   (b) Znaleźć kontrprzykład na implikację przeciwną do powyższej.
   (c) Znaleźć warunki na pierścień R, które gwarantują prawdziwość tejże przeciwnej implikacji.

5. Udowodnić, że jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S, a \in R$ takie, że
$$a(X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n) \in R[X],$$
to $(X - a\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - a\alpha_n) \in R[X]$.

6. Niech $f \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(f) = n$. Definiujemy $F := f + f' + \ldots + f^{(n)}$. Udowodnić, że
$$\left(\frac{F(x)}{e^x}\right)' = -\frac{f(x)}{e^x}.$$