Algebra 2B, Lista 12

Niech R będzie pierścieniem (przemiennym z 1, niezerowym) i $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Niech $I \trianglelefteq R$. Znaleźć warunek na I aby:
   (a) Ideał I był wolnym R-modułem.
   (b) Pierścień ilorazowy R/I był wolnym R-modułem.
2. Udowodnić, że jeśli każdy R-moduł jest wolny, to R jest ciałem.
3. Czy następujące moduły są wolne? Odpowiedzi uzasadnić.
   (a) $\mathbb{Q}$ traktowany jako $\mathbb{Z}$-moduł.
   (b) $R[X_1, \ldots, X_n]$ traktowany jako R-moduł.
   (c) $R[X]$ traktowany jako $R[X^n]$-moduł.
   (d) $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ traktowany jako $\mathbb{Z}$-moduł.
   (e) $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{2}]$ traktowany jako $\mathbb{Z}$-moduł.
   (f) $\mathbb{Z}[\pi]$ traktowany jako $\mathbb{Z}[\pi^2 + \pi + 1]$-moduł.
   (g) $\mathbb{Q}[X]$ traktowany jako $\mathbb{Q}[X^2, X^3]$-moduł.
4. Niech M_1, M_2, M_3, M będą R-modułami. Udowodnić, że:
   (a) $R \otimes M \cong M$,
   (b) $M_1 \otimes M_2 \cong M_2 \otimes M_1$,
   (c) $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \cong M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$,
   (d) $(M_1 \oplus M_2) \otimes M_3 \cong (M_1 \otimes M_3) \oplus (M_2 \otimes M_3)$,
   (e) $M^n \otimes M^m \cong M^{nm}$.