Algebra 2B, Lista 13

Niech R będzie pierścieniem (przemiennym z 1, niezerowym).

1. Niech A będzie torsyjną grupą przemienną. Udowodnić, że
$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A = \{0\}.$$

2. Niech $I \trianglelefteq R$ oraz M będzie R-modułem. Udowodnić, że
$$R/I \otimes_R M \cong M/IM.$$

3. Niech $\bar{X}$ będzie ciągiem zmiennych, $J \trianglelefteq R[\bar{X}]$ oraz S będzie R-algebrą. Udowodnić, że
$$R[\bar{X}]/J \otimes_R S \cong_S S[\bar{X}]/JS[\bar{X}],$$
gdzie $JS[\bar{X}]$ jest ideałem w $S[\bar{X}]$ generowanym przez J.

4. Udowodnić, że (izomorfizm algebr)
$$\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

5. Niech $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$. Znaleźć pierścienie izomorficzne z:
   (a) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m$,
   (b) $\mathbb{Z}[X]/(X^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X]/(X^m)$.