Algebra 2B, Lista 2

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał, R pierścieniem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[n]{2}) = n$.

2. Znaleźć $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

3. Udowodnić, że $[\mathbb{R}(X) : \mathbb{R}(X^n)] = n$.

4. Udowodnić, że $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{3} + \sqrt{3}) = 6$.

5. Podać przykład $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ takich, że $\deg_{\mathbb{Q}}(a) = 2, \deg_{\mathbb{Q}}(b) = 3$ oraz

   (a) $\deg_{\mathbb{Q}}(ab) = 3$,
   (b) $\deg_{\mathbb{Q}}(ab) = 6$.

   Czy możliwa jest sytuacja, że $\deg_{\mathbb{Q}}(ab) = 2$?

6. Udowodnić, że jeśli $[L : K]$ jest liczbą pierwszą, to dla każdego $a \in L \setminus K$ mamy $L = K(a)$.

7. Niech $a, b \in L$ będą algebraiczne nad K. Udowodnić, że jeśli $\deg_K(a)$ i $\deg_K(b)$ są względnie pierwsze, to

$$[K(a, b) : K] = \deg_K(a) \deg_K(b).$$

8. Udowodnić, że jeśli $a \in L$ oraz $\deg_K(a)$ jest liczbą nieparzystą, to $K(a) = K(a^2)$. Czy zachodzi twierdzenie odwrotne?

9. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{char}(K) \neq 2$ i $[L : K] = 2$, to istnieje $a \in L$ taki, że $a^2 \in K$ oraz $L = K(a)$. Czy twierdzenie to jest prawdziwe jeśli $\mathrm{char}(K) = 2$?

10. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że liczba $a + bi$ jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy, gdy a i b są algebraiczne.

11. Udowodnić, że jeśli $a \in \mathbb{Q}$, to $\sin(a\pi)$ oraz $\cos(a\pi)$ są liczbami algebraicznymi.

12. Niech S będzie R-algebrą, $s \in S$ i $\varphi : R[X] \to S$ homomorfizmem R-algebr. Udowodnić, że jeśli $\varphi(X) = s$, to $\varphi = \mathrm{ev}_s$.

13. Udowodnić, że ciało algebraicznie domknięte jest nieskończone.