Algebra 2B, Lista 3

Niech K będzie ciałem.

1. Niech $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ i K będzie podciałem $\mathbb{C}$ takim, że $\sqrt{\alpha} \notin K$. Udowodnić, że $G(K(\sqrt{\alpha})/K) = \{\mathrm{id}, \varphi\}$, gdzie $\varphi(\sqrt{\alpha}) = -\sqrt{\alpha}$.

2. Niech $k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N}_{>1}$ będą parami względnie pierwsze. Udowodnić, że liczby
$$\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \sqrt{\frac{k_3}{k_4}}, \ldots, \sqrt{\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}}}, \ldots$$
są liniowo niezależne nad $\mathbb{Q}$. W którym momencie przestaje działać "naiwny" dowód?

3. Znaleźć $\deg_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11})$.

4. Dla każdego $f \in K[X] \setminus K$ wprowadźmy nową zmienną X_f. Niech
$$R = K[X_f]_{f \in K[X] \setminus K},$$
$$I = (\{f(X_f) \mid f \in K[X] \setminus K\}) \trianglelefteqslant R.$$
Udowodnić, że $I \neq R$.

5. Załóżmy, że K jest przeliczalne i niech
$$K[X] \setminus K = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Definiujemy $K_0 := K$ i dla $n \in \mathbb{N}$, K_{n+1} jako ciało rozkładu f_n nad K_n. Udowodnić, że $L := \bigcup K_n$ jest algebraicznym domknięciem K.

6. Załóżmy, że $K \subseteq L$ jest rozszerzeniem ciał i $[L : K] = 2$. Dowieść, że L jest ciałem rozkładu pewnego $f \in K[X]$.

7. Znaleźć rozszerzenie ciał $K \subseteq L$ takie, że $[L : K] = 3$ i L nie jest ciałem rozkładu żadnego wielomianu o współczynnikach z K.

8. Niech L będzie ciałem rozkładu $f \in K[X]$ i $\deg(f) = n$. Dowieść, że
$$[L : K] \leqslant n!$$

9. Znaleźć przykład nierozkładalnego wielomianu $f \in \mathbb{Q}[X]$ oraz parami różnych $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ takich, że $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$ ale
$$\mathbb{Q}(a_1, a_2) \ncong \mathbb{Q}(a_1, a_3).$$