Algebra 2B, Lista 4

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał, $A \subseteq L$, $a, b \in L$ i $n \in \mathbb{N}$.

1. Udowodnić, że jeśli $K \subseteq L$ jest czysto przestępne, to dla każdego $x \in L \setminus K$, element x jest przestępny nad K.

2. Znaleźć przykład rozszerzenia ciał $K \subseteq M$ takiego, że:

   (a) Dla każdego $x \in M \setminus K$, element x jest przestępny nad K, ale rozszerzenie $K \subseteq M$ nie jest czysto przestępne.

   (b) Nie istnieje wieża ciał $K \subseteq L \subseteq M$ taka, że rozszerzenie $K \subseteq L$ jest algebraiczne i rozszerzenie $L \subseteq M$ jest czysto przestępne.

3. Załóżmy, że $a \notin A$. Udowodnić, że $A \cup \{a\}$ jest algebraicznie niezależny nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebraicznie niezależny nad K i a jest przestępny nad $K(A)$.

4. Udowodnić, że A jest bazą przestępną L nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebraicznie niezależny nad K oraz rozszerzenie $K(A) \subseteq L$ jest algebraiczne.

5. *Twierdzenie Steinitza o wymianie dla algebraicznego domknięcia*
   Udowodnić, że jeśli a jest algebraiczny nad $K(A \cup \{b\})$ i przestępny nad $K(A)$, to b jest algebraiczny nad $K(A \cup \{a\})$.

6. Załóżmy, że M jest ciałem, $\varphi : K \to M$ izomorfizmem oraz $K \subseteq K'$, $M \subseteq M'$ algebraicznymi domknięciami. Udowodnić, że φ przedłuża się do izomorfizmu pomiędzy K' i M'.

7. Niech $K \subseteq L'$ będzie rozszerzeniem ciał, takim że
   $$\operatorname{trdeg}_K L = \operatorname{trdeg}_K L'.$$
   Udowodnić, że jeśli L i L' są algebraicznie domknięte, to $L \cong_K L'$.

8. Załóżmy, że $|L| > |K| \geqslant \aleph_0$. Udowodnić, że $\operatorname{trdeg}_K L = |L|$.

9. Udowodnić, że jeśli L i L' są nieprzeliczalnymi, algebraicznie domkniętymi ciałami tej samej charakterystyki i tej samej mocy, to $L \cong L'$.

10. Udowodnić, że z dokładnością do izomorfizmu istnieje przeliczalnie wiele przeliczalnych ciał algebraicznie domkniętych.

11. Udowodnić, że $|\operatorname{Aut}(\mathbb{C})| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

12. Znaleźć nieprzeliczalnie wiele parami nieizomorficznych podciał $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$.