

## Algebra 2B, Lista 5

Niech  $p$  będzie liczbą pierwszą i  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Udowodnić, że ciało liczb rzeczywistych nie jest rozszerzeniem czysto przestępnym żadnego swojego właściwego podciała.
2. Określić stopień przestępny dla następującego rozszerzenia. Czy jest ono czysto przestępne?
  - (a)  $\mathbb{R}(X + Y) \subseteq \mathbb{R}(X, Y)$ ;
  - (b)  $\mathbb{R}(X^2, Y + Z) \subseteq \mathbb{R}(X, Y, Z)$ ;
  - (c)  $\mathbb{R}(X^2 + Y^2 + Z^2) \subseteq \mathbb{R}(X, Y, Z)$ .
3. Rozłożyć  $(\mathbb{Z}_{2^n})^*$  na produkt grup cyklicznych.
4. Niech  $R \subseteq S$  będzie rozszerzeniem pierścieni,  $f, h \in R[X]$ ,  $f$  będzie unormowany,  $g \in S[X]$  oraz  $fg = h$ . Udowodnić, że  $g \in R[X]$ .
5. Napisać jawnie (tzn. podając współczynniki całkowite) następujące wielomiany:
  - (a)  $F_6$ ,
  - (b)  $F_{10}$ ,
  - (c)  $F_{15}$ ,
  - (d)  $F_{p^n}$ ,
  - (e)  $F_{2p}$ .
6. Następujące wielomiany rozłożyć nad  $\mathbb{Q}$  na iloczyn wielomianów nierozkładalnych:
  - (a)  $X^{16} - 1$ ,
  - (b)  $X^{15} - 1$ ,
  - (c)  $X^{12} - 1$ .