Algebra 2B, Lista 6

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał i $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech K będzie skończone i $f \in K[X]$ będzie nierozkładalny. Udowodnić, że f jest rozdzielczy.
2. Podać przykład K i wielomianu nierozkładalnego $f \in K[X]$, który ma tylko pierwiastki wielokrotne w K^{alg}.
3. Udowodnić, że istnieje monomorfizm $\mathbb{F}_{p^m} \to \mathbb{F}_{p^n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m|n$.
4. Używając monomorfizmów z poprzedniego zadania przyjmijmy, że mamy ciąg rozszerzeń ciał:
$$\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^2} \subset \mathbb{F}_{p^6} \subset \ldots \subset \mathbb{F}_{p^{n!}} \subset \ldots$$
Udowodnić, że ciało $\bigcup_n \mathbb{F}_{p^{n!}}$ jest algebraicznym domknięciem $\mathbb{F}_p$.
5. Załóżmy, że rozszerzenie $K \subseteq L$ jest skończone. Udowodnić, że $K \subseteq L$ jest normalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f \in K[X]$ taki, że L jest ciałem rozkładu f nad K.
6. Znaleźć wieżę ciał $K \subseteq L \subseteq M$ taką, że:
   (a) Rozszerzenie $K \subseteq M$ jest normalne, ale $K \subseteq L$ nie jest normalne.
   (b) Rozszerzenia $K \subseteq L, L \subseteq M$ są normalne, ale $K \subseteq M$ nie jest normalne.
7. Dla $f, g \in K[X]$ udowodnić, że:
   (a) $(f+g)' = f' + g'$,
   (b) $(fg)' = f'g + fg'$,
   (c) $f(g)' = f'(g)g'$.
8. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p$ i niech $f \in K[X]$. Udowodnić, że $f' = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in K[X]$ taki, że $f = g(X^p)$.
9. Znaleźć $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ takie, że:
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\alpha)$,
   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\beta)$,
   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - i, \sqrt{3} + i) = \mathbb{Q}(\gamma)$.
10. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p$. Udowodnić, że nie istnieje $\alpha \in K(X, Y)$ taki, że:
$$K(X^p, Y^p)(\alpha) = K(X, Y).$$