Algebra 2B, Lista 7

Niech K będzie ciałem, p liczbą pierwszą, $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $m|n$ i $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. Załóżmy, że rozszerzenie ciał $K \subseteq L$ jest skończone. Udowodnić, że:

   (a) $[L : K]_s \leqslant [L : K]$,

   (b) $[L : K]_s = [L : K]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K \subseteq L$ jest rozdzielcze.

2. Niech $f \in K[X]$ będzie stopnia n.

   (a) Udowodnić, że $[K(X) : K(f(X))] = n$.

   (b) Znaleźć wielomian minimalny X nad $K(f(X))$.

3. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) = p$. Zbadać czy następujące rozszerzenia ciał są rozdzielcze:

   (a) $K(X^p + X) \subseteq K(X)$,

   (b) $K(X^p + 1) \subseteq K(X)$,

   (c) $K(X^{2p} + X^p) \subseteq K(X)$.

4. Niech s_i będzie i-tym wielomianem symetrycznym n zmiennych nad ciałem K. Udowodnić, że:

$$K(X_1, \dots, X_n)^{S_n} = K(s_1, \dots, s_n).$$

5. Udowodnić, że dla

$$\tau : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}, \quad \tau(x) = x^{p^m}$$

   mamy $G(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_{p^m}) = \langle \tau \rangle$.

6. Niech $p_1, \dots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnić, że $G(\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}_2, +)^n$.

7. Wyznaczyć $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \varepsilon_3)/\mathbb{Q})$.

8. Zilustrować zasadnicze twierdzenie teorii Galois (tzn. narysować $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{G}$ i odpowiedniości pomiędzy nimi) na przykładach następujących rozszerzeń:

   (a) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,

   (b) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_{10})$,

   (c) $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$,

   (d) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \varepsilon_3)$.