Algebra 2B, Lista 8

Niech K będzie ciałem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $\mathbb{Q} \subseteq L$ będzie rozszerzeniem Galois zawartym w $\mathbb{C}$ takim, że $[L : \mathbb{Q}]$ jest nieparzysty. Udowodnić, że $L \subseteq \mathbb{R}$.

2. Niech L będzie ciałem rozkładu nad K wielomianu nierozkładalnego f stopnia 3.

   (a) Udowodnić, że $G(L/K)$ jest izomorficzna z jedną z następujących grup: $S_3, (\mathbb{Z}_3, +_3), S_1$.

   (b) Znaleźć K i f dla każdej z trzech grup występujących w (a).

3. Niech L będzie ciałem rozkładu wielomianu X^4+X^2-6 nad $\mathbb{Q}$. Znaleźć $G(L/\mathbb{Q})$.

4. Niech $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1, 1\}$ będzie bezkwadratowa i p będzie liczbą pierwszą. Niech L będzie ciałem rozkładu $X^p - d$ nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że grupa $G(L/\mathbb{Q})$ jest rozwiązalna rzędu $p(p-1)$.

5. Wskazać $z \in \mathbb{C}$ takie, że rozszerzenie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(z)$ jest Galois oraz $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ jest izomorficzna z:

   (a) $(\mathbb{Z}_2, +)^2 \times (\mathbb{Z}_4, +)$.

   (b) $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_4, +)^2$.

   (c) $(\mathbb{Z}_2, +)^3 \times (\mathbb{Z}_3, +)$.

   (d) $(\mathbb{Z}_3, +)$.

6. Udowodnić, że istnieje rozszerzenie Galois $\mathbb{Q} \subseteq K$ takie, że $G(K/\mathbb{Q})$ jest izomorficzna z:

   (a) $(\mathbb{Z}_p, +)$, gdzie p jest liczbą pierwszą.

   (b) $(\mathbb{Z}_n, +)$ (dowód może wymagać skorzystania z twierdzenia, które wykracza poza ramy tego wykładu).