Algebra 2B, Lista 9

Niech K będzie ciałem charakterystyki 0 i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że
   (a) $r(K)$ i $r_n(K)$ są podciałami K^{alg}.
   (b) Rozszerzenia $K \subseteq r(K)$ i $K \subseteq r_n(K)$ są normalne.
   (c) $r(r(K)) = r(K)$ i $r_n(r_n(K)) = r_n(K)$.
   (d) Jeśli $K \subseteq L$ jest rozszerzeniem ciał, to $r(K) \subseteq r(L)$ i również $r_n(K) \subseteq r_n(L)$.
2. Udowodnić, że jeśli $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$ jest rozkładem n na liczby pierwsze, $q := \max\{q_1, \ldots, q_r\}$, $a \in K$ oraz L jest ciałem rozkładu $X^n - a$ nad K, to $L \subseteq r_q(K)$.
3. Udowodnić, że $r_n(K) = r_s(K)$, gdzie
$$s := \max\{q \in \mathbb{P} \mid q \leqslant n\}.$$
4. Udowodnić, że jeśli $L \subseteq r_n(K)$ i rozszerzenie $K \subseteq L$ jest skończone, to każdy dzielnik pierwszy $[L : K]$ jest nie większy od n.
5. Niech $f = X^6 + aX^3 + b \in K[X]$. Udowodnić, że pierwiastki f wyrażają się przez pierwiastniki nad K.
6. Niech
$$f := a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in K[X],$$
gdzie $a_n \neq 0$ i $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Udowodnić, że jeśli $n \leqslant 9$, to pierwiastki f wyrażają się przez pierwiastniki nad K.
7. Niech $K \subseteq L \subseteq M$, $K \subseteq L' \subseteq M$ będą wieżami ciał takimi, że rozszerzenia $K \subseteq L$, $K \subseteq L'$ są normalne. Udowodnić, że rozszerzenie $K \subseteq LL'$ jest normalne.
8. Załóżmy, że G jest skończoną grupą rozwiązalną, której rząd jest liczbą złożoną. Udowodnić, że G nie jest prosta.
9. Udowodnić, że:
   (a) $\langle (12), (12 \ldots n) \rangle = S_n$.
   (b) Jeśli n jest liczbą pierwszą, to dla każdego n-cyklu $\tau \in S_n$ i każdej transpozycji $\sigma \in S_n$ mamy $\langle \sigma, \tau \rangle = S_n$.