ALGEBRA A, Lista 1

Dla zbioru A, $\mathcal{P}(A)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów A i A^A jest zbiorem wszystkich funcji z A w A.

1. Niech $A = \{x, y\}$. Napisać tabelki następujących działań.

   (a) $(\mathcal{P}(A), \triangle)$, $X \triangle Y = X \setminus Y \cup Y \setminus X$.

   (b) $(A^A, \circ)$, gdzie $\circ$ jest składaniem funkcji.

   (c) $(\mathbb{Z}_5, \cdot_5)$.

2. Podać przykład (tabelkę) działania $\bigstar$ na zbiorze $\{x, y\}$ takiego, że $x \bigstar (x \bigstar x) \neq (x \bigstar x) \bigstar x$. Ile istnieje takich działań?

3. Ile różnych działań można określić na zbiorze 5-elementowym? Ile z nich jest przemienne? Ile z nich ma element neutralny?

4. Niech $\triangledown$ będzie działaniem na zbiorze A. Udowodnić, że jeśli a i b są elementami neutralnymi w $(A, \triangledown)$, to $a = b$.

5. Sprawdzić, czy poniższe działania są: łączne, przemienne, mają element neutralny, które elementy mają elementy odwrotne.

   (a) $(A, \blacktriangleleft)$, gdzie A jest dowolnym zbiorem i $a \blacktriangleleft b = a$.

   (b) $(\mathcal{P}(A), \setminus)$, gdzie A jest dowolnym zbiorem i $\setminus$ jest różnicą zbiorów.

   (c) $(\mathbb{R}, \clubsuit)$, $x \clubsuit y = x + y + 2$.

   (d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, :)$.

   (e) $(\mathbb{R}, \square)$, $a \square b = \sqrt{a + b}$.

   (f) $(\mathbb{R}, \circledast)$, $a \circledast b = 2^{a+b}$.

   (g) $(\mathbb{C}, \maltese)$, $z \maltese w = \overline{z \cdot w}$.

   (h) $(\mathbb{C}, \boxtimes)$, $z \boxtimes w = \mathrm{Re}(z + w)$.

   (i) $(\mathbb{N}, \diamond)$, $m \diamond n = \mathrm{NWD}(m, n)$.

   (j) $(\mathbb{N}, \vee)$, $m \vee n = \max(n, m)$.

   (k) $(\mathbf{P}, \blacklozenge)$, gdzie $\mathbf{P}$ jest płaszczyzną i $P \blacklozenge Q$ jest środkiem odcinka o końcach P, Q.