ALGEBRA A, Lista 10

1. Czy podany wielomian jest rozkładalny w pierścieniu $K[x]$?

   (a) $f_1 = x^4 + 1$, $K = \mathbb{R}$,
   (b) $f_2 = x^3 + 3x^2 + x + 4$, $K = \mathbb{Z}_5$,
   (c) $f_3 = 3x^5 + 12x^4 + 40x - 22$, $K = \mathbb{Q}$,
   (d) $f_4 = 5x^{77777} - 3x + 10$, $K = \mathbb{R}$.
   (e) $f_5 = x^{100} - 95$, $K = \mathbb{Q}$,
   (f) $f_6 = 3x^3 + 2$, $K = \mathbb{Z}_{59}$,
   (g) $f_7 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Q}$,

2. Ile wynosi reszta z dzielenia liczby 100! przez 101?

3. Udowodnić twierdzenie odwrotne do twierdzenia Wilsona: Jeżeli $p > 1$ i p dzieli $(p-1)! + 1$, to p jest liczbą pierwszą.

4. Znaleźć liczbę naturalną n, taką że n nie dzieli $(n-1)! + 1$.

5. Znaleźć ideał I w pierścieniu

   (a) $\mathbb{Z}_2[x]$ taki, że $\mathbb{Z}_2[x]/I$ jest ciałem ośmio-elementowym.
   (b) $\mathbb{Z}_3[x]$ taki, że $\mathbb{Z}_3[x]/I$ jest ciałem dziewięcio-elementowym.

6. Udowodnić następujące izomorfizmy pierścieni.

   (a) $C([0,1])/I \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, gdzie $I = \{f \in C([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$,
   (b) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$,
   (c) $\mathbb{Z}_{nm}/m\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n$,
   (d) $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$,
   (e) $\mathbb{R}[x]/(x^3 + x) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$,
   (f) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$,
   (g) $(R_1 \oplus R_2)/(I_1 \times I_2) \cong (R_1/I_1) \oplus (R_2/I_2)$, gdzie I_1 jest ideałem R_1 i I_2 jest ideałem R_2.

7. Udowodnić, że $\mathbb{Z}[x]$ nie jest pierścieniem ideałów głównych.

8. Scharakteryzować ideały pierwsze i maksymalne w pierścieniu $K[x]$, gdzie K jest ciałem.