ALGEBRA A, Lista 11

1. Czy w pierścieniu R prawdą jest, że:

   (a) $1+i|5+2i$, $1+i|7-i$, $-6-i \sim 1-6i$, $1-i \sim 1+2i$; $R = \mathbb{Z}[i]$?

   (b) $10 \sim 5$, $\frac{35}{4}|\frac{7}{2}$, $6|9$; $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$?

2. Wykazać, że relacja podzielności w pierścieniu całkowitym posiada następujące własności:

   (a) $1|a$, $a|a$,

   (b) $a|b \Longrightarrow a|bc$,

   (c) $(a|b \wedge a|c) \Longrightarrow (a|b+c \wedge a|b-c)$,

   (d) $a|b \Longrightarrow ac|bc$,

   (e) $(a|b \wedge c|d) \Longrightarrow ac|bd$,

   (f) $(a|b \wedge b|c) \Longrightarrow a|c$,

   (g) $0|a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$.

3. Korzystając z wniosku z chińskiego twierdzenia o resztach udowodnić, że:

   (a) $\mathbb{R}[x]/((x^2+1)\mathbb{R}[x] \cap x\mathbb{R}[x]) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$

   (b) $\mathbb{Q}[x]/((x^2-3)\mathbb{Q}[x] \cap (x^2-2)\mathbb{Q}[x]) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \oplus \mathbb{Q}(\sqrt{3})$