

ALGEBRA A, Lista 12

1. Niech R będzie pierścieniem całkowitym z jednoznacznym rozkładem. Wykazać, że:

- (a) Jeśli 1 jest największym dzielnikiem elementów a, b oraz największym wspólnym dzielnikiem elementów a, c , to 1 jest największym wspólnym dzielnikiem elementów a, bc .
- (b) Jeśli $a|bc$ i 1 jest największym wspólnym dzielnikiem elementów a, b , to $a|c$.
- (c) Jeśli $a|c$, $b|c$ i 1 jest największym wspólnym dzielnikiem elementów a, b , to $ab|c$.

2. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R .

- (a) $7 + \sqrt{5}i, 2 + 3\sqrt{5}i, 5 + 4\sqrt{5}i; R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$,
- (b) $-1 + 7i, 5, 23, 1 + 6i; R = \mathbb{Z}[i]$.

3. Niech a i b będą stowarzyszonymi elementami pierścienia całkowitego R . Wykazać, że:

- (a) a jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy b jest odwracalny,
- (b) a jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy b jest nierozkładalny.

4. Udowodnić, że 1 i -1 to jedyne elementy odwracalne w $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$.

5. Pokazać, że

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 - \sqrt{3}i)$$

są dwoma niestowarzyszonymi rozkładami 4 na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{Z}[\sqrt{3}i]$.

6. Znaleźć największy wspólny dzielnik dla następujących $f, g \in \mathbb{R}[x]$:

$$f = 7(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x^2+4)^4, \quad g = -2(x-1)^2(x+2)(x+5)(x^2+4)^7.$$

7. Znaleźć największy wspólny dzielnik w $\mathbb{Z}[i]$ (rozkładając na czynniki nierozkładalne)

- (a) 17 oraz $-15 + 8i$.
- (b) 13 oraz $12 + 5i$.
- (c) $-10 + 11i$ oraz $-5 + 12i$.