

ALGEBRA A, Lista 13

Egzamin odbędzie się 2 LUTEGO o 12.15 w salach HS i WS

1. Używając algorytmu Euklidesa znaleźć największy wspólny dzielnik c elementów a, b pierścienia R oraz $x, y \in R$ takie, że $c = xa + yb$ dla
 - (a) $a = 510, b = 184, R = \mathbb{Z}$
 - (b) $a = x^5 + 1, b = x^4 + 3x^3 + 2x + 1, R = \mathbb{Q}[x]$.
 - (c) $a = 2x^4 + 3x^2 + 1, b = x^4 - 1, R = \mathbb{R}[x]$.
 - (d) $a = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3, b = x^3 + 5x^2 + 7x + 3, R = \mathbb{Z}_{11}[x]$.
 - (e) $a = 22 + 5i, b = 5 + 3i, R = \mathbb{Z}[i]$.
 - (f) $a = 19 + 9i, b = 11 - 3i, R = \mathbb{Z}[i]$.
2. Korzystając z algorytmu Euklidesa znaleźć
 - (a) Element odwrotny do elementu 637 w pierścieniu \mathbb{Z}_{460} .
 - (b) Element odwrotny do elementu 649 w pierścieniu \mathbb{Z}_{1000} .
3. Udowodnić, że następujące ciała są izomorficzne.
 - (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ i ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
 - (b) $\mathbb{Q}(i)$ i ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$.
 - (c) Ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[x]$ i ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Q}[x]$.
 - (d) Ciało K i ciało ułamków ciała K .
4. Niech \sim będzie relacją na $\mathbb{Z}_6 \times (\mathbb{Z}_6 \setminus \{0\})$ zdefiniowaną

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Udowodnić, że \sim nie jest relacją równoważności.