ALGEBRA A, Lista 2

1. Czy zbiór z danym działaniem stanowi grupę (grupę abelową)?
   (a) $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) \in \{1, -1\}\}$ z mnożeniem macierzy.
   (b) $\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$ z mnożeniem macierzy.
   (c) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ – zbiór macierzy $n \times n$ o wyrazach całkowitych i wyznaczniku równym 1 z działaniem mnożenia macierzy.
   (d) Zbiór podzbiorów zbioru X względem różnicy symetrycznej.
   (e) $\mathbb{R}$ z działaniem $a \circ b = a + b + a \cdot b$.
   (f) $(0, 1]$ z mnożeniem i $(0, \infty)$ z mnożeniem.
   (g) Zbiór $\{1, -1, i, -i\}$ względem mnożenia liczb zespolonych.
   (h) Zbiór $[0, 1)$ z działaniem $a \star b = a + b -$ część całkowita$(a + b)$.

2. Każdy element grupy $(G, \circ)$ spełnia równanie $x \circ x = e$. Dowieść, że $(G, \circ)$ jest grupą abelową.

3. W zbiorze G określone jest działanie łączne $\circ$, mające element neutralny e. Ponadto dla dowolnego elementu $g \in G$ istnieje $h \in G$ taki, że $h \circ g = e$. Dowieść, że $(G, \circ)$ jest grupą.

4. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą, $g, h \in G$ i $n, m \in \mathbb{Z}$. Pokazać, że:
   $(g^n)^m = g^{nm}$, $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$, jeśli $g \cdot h = h \cdot g$, to $(g \cdot h)^n = g^n \cdot h^n$.

5. Pokazać, że suma prosta grup abelowych jest grupą abelową.

6. Napisać tabliczkę działania w $(\mathbb{Z}_2, +_2) \oplus (\mathbb{Z}_3, +_3)$.

7. Elementy a i b grupy $(G, \cdot)$ są *sprzężone* (oznaczenie: $a \sim b$), jeśli istnieje element $g \in G$ taki, że $b = g^{-1} \cdot a \cdot g$. Dowieść, że:
   (a) Relacja sprzężenia jest równoważnością w grupie G.
   (b) Grupa jest abelowa, wtedy i tylko wtedy gdy klasy abstrakcji $\sim$ są jednoelementowe.

8. Napisać tabliczkę działania grupy izometrii własnych kwadratu (D_4) i prostokąta, który nie jest kwadratem.

9. Podać przykład grupy $(G, \cdot)$ i elementów $a, b \in G$ takich, że
   (a) rząd$(a) =$ rząd$(b) = 2$, ale rząd$(a \cdot b) > 2$.
   (b) rząd$(a) =$ rząd$(b) = 3$, ale rząd$(a \cdot b) < 3$.