ALGEBRA A, Lista 3

1. Niech
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 & 9 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$
   (a) Rozłożyć σ na iloczyn cykli rozłącznych.
   (b) Rozłożyć σ na iloczyn transpozycji.
   (c) Policzyć $\mathrm{sgn}(\sigma)$.
   (d) Obliczyć $\sigma^{100}, \sigma^{2004}, \sigma^{-999}$.

2. Dane są permutacje:
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
   (a) Rozłożyć $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ na iloczyn cykli rozłącznych.
   (b) Rozłożyć $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ na iloczyn transpozycji.
   (c) Znaleźć liczbę inwersji w każdej z tych permutacji.
   (d) Określić parzystość oraz rząd permutacji σ_1, σ_2, σ_3.
   (e) Znaleźć złożenia: $\sigma_1^{-3} \circ \sigma_2^2$, $\sigma_3^4 \circ \sigma_2^{-2}$, $\sigma_3^{-1} \circ \sigma_2^{-2} \circ \sigma_1^{-1}$.

3. Udowodnić, że rząd cyklu jest równy jego długości.

4. Dowieść, że cykl długości k jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy k jest liczbą nieparzystą.

5. Udowodnić, że każdą transpozycje można przedstawić w postaci złożenia transpozycji sąsiednich.

6. Wskazać przykłady elementów rzędu 10 w grupie S_7 i elementów rzędu 15 w grupie S_8.

7. Wypisać elementy A_4.