ALGEBRA A, Lista 4

1. Niech $(G, \cdot)$ będzie dowolną grupą i $g \in G$. Udowodnić, że następujące podzbiory G są podgrupami:

   (a) $C(g) = \{h \in G : h \cdot g = g \cdot h\}$ (*centralizator g w G*)

   (b) $Z(G) = \{h \in G : (\forall\, a \in G)\ h \cdot a = a \cdot h\}$ (*centrum G*).

   Pokazać, że $Z(G)$ jest dzielnikiem normalnym.

2. Wyznaczyć centrum S_3 i Q_8 (grupy kwaternionów).

3. Niech S będzie jedną z symetrii w D_3. Pokazać, że $\langle S \rangle$ (grupa generowana przez S) to $\{\mathrm{id}, S\}$ i wypisać wszystkie warstwy lewo i prawostronne $\langle S \rangle$ w D_3.

4. Dla $n|m$ znaleźć:

   (a) epimorfizm $(\mathbb{Z}_m, +_m) \to (\mathbb{Z}_n, +_n)$

   (b) monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_m, +_m)$.

5. Pokazać, że dla $n > 1$ nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}, +)$.

6. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_2, +_2) \to (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

7. Pokazać, że nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_3, +_3) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

8. Dla każdego n, znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

9. Znaleźć epimorfizm $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

10. Pokazać, że każda grupa cykliczna jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ dla pewnego n, lub $(\mathbb{Z}, +)$.

11. Pokazać, że $D_3 \cong S_3$.

12. Używając tw. Cayley'a znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_2, +_2) \oplus (\mathbb{Z}_2, +_2) \to S_4$.

13. Pokazać, że $(\mathbb{Z}_2, +_2) \oplus (\mathbb{Z}_2, +_2)$ nie jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

14. Pokazać, że każda grupa rzędu 4 jest izomorficzna z $(\mathbb{Z}_2, +_2) \oplus (\mathbb{Z}_2, +_2)$ lub $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.