ALGEBRA A, Lista 5

22 listopada będzie 50-minutowe kolokwium z list 1,2,3,4, na którym należy się spodziewać zadań **trudniejszych** niż na kartkówkach.

1. Niech $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(A) = \det(A)$.
   (a) Znaleźć $\ker(f)$ i $\mathrm{im}(f)$.
   (b) Pokazać, że $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

2. Niech $f : (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $f(z) = z^n$.
   (a) Znaleźć $\ker(f)$ i $\mathrm{im}(f)$.
   (b) Pokazać, że $\ker(f) \cong (\mathbb{Z}_n, +_n)$.
   (c) Pokazać, że $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \ker(f) \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

3. Niech $\varphi : G \to H$, $\psi : H \to N$ będą homomorfizmami. Pokazać, że
   (a) $\psi \circ \varphi : G \to N$ jest homomorfizmem.
   (b) $\ker(\psi \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\ker(\psi))$.

4. Udowodnić, że jeśli G jest grupą abelową rzędu pq, gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

5. Pokazać, że następujące grupy **nie** są izomorficzne:
   (a) $(\mathbb{Q}, +)$ i $(\mathbb{R}, +)$.
   (b) $(\mathbb{Q}, +)$ i $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.
   (c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
   (d) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$.
   (e) D_4 (grupa izometrii kwadratu) i Q_8 (grupa kwaternionów).