ALGEBRA A, Lista 6

1. W zbiorze $3\mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 3) definiujemy działania: $x \oplus y = x + y$ i $x \odot y = \frac{xy}{3}$. Wykazać, że $(3\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ jest pierścieniem przemiennym z jednością.

2. W $\mathbb{R}$ definiujemy działania $x \wedge y = \min(x, y)$ i $x \vee y = \max(x, y)$. Czy struktury $(\mathbb{R}, \vee, \wedge)$, $(\mathbb{R}, \wedge, \vee)$ są pierścieniami?

3. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Dowieść, że $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ jest pierścieniem przemiennym z jednością. Opisać dzielniki zera i elementy odwracalne.

4. Wykazać, że zbiory

   $$R_1 = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\},\ R_2 = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

   ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami. Wyprowadzić wzory na elementy odwrotne.

5. Wykazać, że zbiór $R = \{a + b\frac{1+\sqrt{3}i}{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem stanowi pierścień całkowity. Z jaką grupą jest izomorficzna $U(R)$?

6. Udowodnić, że jeśli w pierścieniu R każdy element spełnia równanie $xx = x$, to wtedy dla każdego $x \in R$ zachodzi $x + x = 0$ i R jest pierścieniem przemiennym.

7. Wykazać, że zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ jest podpierścieniem pierścienia macierzy 2×2 z dodawaniem i mnożeniem macierzy. Czy jest on ideałem?

8. Wykazać, że zbiór $\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ jest podpierścieniem ciała $\mathbb{Q}$, ale nie jest podciałem.

9. Czy następujące zbiory są ideałami (podpierścieniami?) pierścienia funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ z działaniami dodawania i mnożenia funkcji?

   (a) Zbiór funkcji f takich, że $f(1) = f(2)$,

   (b) Zbiór funkcji f takich że $f(4) = 0$.

   (c) Zbiór funkcji f takich, że $(\exists k \in \mathbb{Z})(2^k f(0) = f(1))$.