ALGEBRA A, Lista 7

1. Niech A będzie grupą abelową i $\mathrm{End}(A)$ będzie zbiorem wszystkich homomorfizmów z A w A.

   (a) Pokazać, że $(\mathrm{End}(A), \circ, +)$ jest pierścieniem z jedynką, gdzie $\circ$ jest składaniem funkcji i $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ ($f(a) + g(a)$ liczymy w grupie A).

   (b) Podać przykład skończonej grupy abelowej A, takiej że $\mathrm{End}(A)$ nie jest przemienny.

2. Niech R oznacza pierścień funkcji funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$. Udowodnić, że $f \in R$ jest dzielnikiem zera wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $a < b$ i $f(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.

3. Niech k będzie dodatnią liczbą naturalną. Wykazać, że

$$\mathbb{Z}_{(k)} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, k \text{ nie dzieli } m\}$$

   jest podpierścieniem $\mathbb{Q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest liczbą pierwszą.

4. W zbiorze $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definiujemy działania $\oplus$ i $\odot$ w następujący sposób: $\langle a, b\rangle \oplus \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle$, $\langle a, b\rangle \odot \langle c, d\rangle = \langle ac + 2bd, ad + bc\rangle$. Wykazać, że $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

5. Niech $a, b \in R$, gdzie R jest pierścieniem całkowitym. Wykazać, że $aR = bR$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje element odwracalny $u \in R$ taki, że $b = ua$.

6. Znaleźć przemienny pierścień z jedynką R i elementy $a, b \in R$ takie, że

   (a) a i b są odwracalne, ale $a + b$ nie jest odwracalny.

   (b) a i b nie są odwracalne, ale $a + b$ jest odwracalny.

   (c) a i b są dzielnikami zera, ale $a + b$ nie jest dzielnikiem zera.

7. Znaleźć wszystkie ideały w pierścieniu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{R}$.

8. Znaleźć przemienny pierścień z jedynką R i elementy $a, b \in R$ takie, że $\mathrm{char}(R) = 4$ i $(a + b)^4 \neq a^4 + b^4$.

9. Niech p będzie liczbą pierwszą i a liczbą naturalną. Używając własności działań w ciele $\mathbb{Z}_p$ udowodnić, że $p | a^p - a$.