ALGEBRA A, Lista 8

1. Udowodnić, że dla liczb naturalnych n i m:

   (a) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathrm{NWD}(n,m)\mathbb{Z}$

   (b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \mathrm{NWW}(n,m)\mathbb{Z}$

   (c) $n\mathbb{Z} \cdot m\mathbb{Z} = nm\mathbb{Z}$

2. Udowodnić, że w całkowitym pierścieniu ideałów głównych każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny.

3. Czy zbiór wszystkich ideałów z pierścienia R z działaniami dodawania i mnożenia ideałów jest pierścieniem? Odpowiedź uzasadnić.

4. Znaleźć wszystkie ideały maksymalne w pierścieniu $\mathbb{Z}_{30}$.

5. Wykazać, że żadne dwa spośród pierścieni:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   nie są izomorficzne.

6. W zbiorze $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definiujemy działania:

$$\langle a, b\rangle \oplus \langle c, d\rangle = \langle a + b, c + d\rangle, \quad \langle a, b\rangle \odot \langle c, d\rangle = \langle ac + 3bd, ad + bc\rangle.$$

   Wykazać, że $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ jest ciałem izomorficznym z ciałem $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

7. Definiujemy pierścień $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \{n2^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb wymiernych. Wykazać, że nie istnieje epimorfizm $f : \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{Z}$.

8. Wykazać, że jeśli $f : R \longrightarrow S$ jest homomorfizmem pierścieni i

   (a) I jest ideałem pierścienia S, to $f^{-1}(I)$ jest ideałem w R.

   (b) I jest podpierścieniem pierścienia S, to $f^{-1}(I)$ jest podpierścieniem w R.

   (c) f jest epimorfizmem i I jest ideałem pierścienia R, to $f(I)$ jest ideałem pierścienia S.