ALGEBRA A, Lista 9

1. Udowodnić, że nie istnieje wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ taki, że $w(0) = 0$ i $w(2) = 1$.

2. Dowieść, że każda funkcja $f : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ jest funkcją wielomianową.

3. Niech $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ będzie funkcją określoną następująco: $f(0) = 1$, $f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Dowieść, że f nie jest funkcją wielomianową.

4. Znaleźć przemienny pierścień z 1 R i wielomian $f \in R[x]$ taki, że

   (a) $\mathrm{st}(f) = 1$ i f ma nieskończenie wiele różnych pierwiastków.

   (b) $\mathrm{st}(f) = 2$, f jest unormowany i f ma nieskończenie wiele różnych pierwiastków.

5. Wyznaczyć krotność

   (a) Pierwiastka 2 wielomianu $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (b) Pierwiastka -1 wielomianu $x^5 + x^4 + 4x^2 + 7x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$.

   (c) Pierwiastka 0 wielomianu $x^6 + x^3 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Wyznaczyć krotność pierwiastka 1 wielomianu f.

7. Niech $f \in \mathbb{Z}_p[X]$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że $f' = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_p$ takie, że

$$f = a_0 + a_1 x^p + \ldots a_n x^{np}.$$

8. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ wielomian $x^3 - 3x + a \in \mathbb{R}[x]$ ma pierwiastek wielokrotny?

9. Niech $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ będzie unormowanym wielomianem stopnia 4. Załóżmy, że 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym f i 3 oraz 4 są pozostałymi pierwiastkami f. Znaleźć współczynniki f.

10. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}[x]$ będą pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ $(a \neq 0, c \neq 0)$. Udowodnić, że

    (a) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$.

    (b) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{b}{c}$.