ALGEBRA A, Kolokwium 1, 22 XI 2004

Zadanie 1

Dla grupy G i jej podgrup H_1, H_2 niech

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}.$$

1. Udowodnić, że jeśli H_1 jest dzielnikiem normalnym G, to H_1H_2 jest podgrupą G. (**15 PT**)
2. Udowodnić, że jeśli H_1 i H_2 są dzielnikami normalnymi G, to H_1H_2 jest dzielnikiem normalnym G. (**10 PT**)
3. Podać przykład grupy G i jej podgrup H_1, H_2 takich, że H_1H_2 nie jest podgrupą G (wszystko uzasadnić!). (**10 PT**)

Zadanie 2

Niech

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Rozłozyć σ_1 i σ_2 na iloczyn cykli rozłącznych. (**10 PT**)
2. Znaleźć (napisać wszystkie obliczenia!) $\tau \in S_7$ takie, że $\tau^2 = \sigma_1$. (**15 PT**)
3. Udowodnić, że nie istnieje $\tau \in S_7$ takie, że $\tau^2 = \sigma_2$. (**10 PT**)

Zadanie 3

Udowodnić, że:

1. $(\mathbb{Z}_2, +_2) \oplus (\mathbb{Z}_5, +_5) \cong (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$. (**10 PT**)
2. Nie istnieje epimorfizm $(\mathbb{Q}, +)$ na $(\mathbb{R}, +)$. (**5 PT**)
3. Nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ w $(\mathbb{Z}_4, +_4) \oplus (\mathbb{Z}_4, +_4)$. (**10 PT**)
4. Nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ w $(\mathbb{Z}_2, +_2) \oplus (\mathbb{Z}_8, +_8)$. (**5 PT**)