ALGEBRA 1B, Lista 10

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1.

1. Udowodnić, że $R[\![X]\!]$ z działaniami podanymi na wykładzie jest pierścieniem przemiennym z 1.

2. Niech $F = \sum a_i X^i \in R[\![X]\!]$. Udowodnić, że $F \in R[\![X]\!]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \in R^*$.

3. Udowodnić, że $R[X]$ jest podpierścieniem $R[\![X]\!]$.

4. Niech R będzie dziedziną i $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in R[X]$. Udowodnić, że $P \in R[X]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $a_0 \in R^*$.

5. Niech $(G, \cdot)$ będzie *półgrupą z 1*, tzn. $\cdot$ jest łączne i ma element neutralny. Niech RG będzie zbiorem funkcji z G w R, które są równe 0 na prawie wszystkich elementach G. Dla $\phi, \psi \in RG, g \in G$ niech

$$(\phi + \psi)(g) := \phi(g) + \psi(g), \quad (\phi\psi)(g) = \sum_{g_1 g_2 = g} \phi(g_1)\psi(g_2).$$

   Udowodnić, że

   (a) RG z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest pierścieniem z 1.
   (b) RG jest przemienny wtedy i tylko wtedy, gdy działanie w G jest przemienne.
   (c) $R\mathbb{N} \cong R[X]$, gdzie $\mathbb{N}$ jest półgrupą ze zwykłym dodawaniem.

6. Udowodnić, że $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

7. Dla $n \in \mathbb{N}$ pokazać, że:

   - $\mathrm{End}(\mathbb{Z}_n, +_n) \cong (\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$
   - $\mathrm{End}(\mathbb{Z}^n) \cong M_n(\mathbb{Z})$.

8. Załóżmy, że R jest *pierścieniem Boole'a*, czyli że dla każdego $r \in R$ mamy $r^2 = r$. Udowodnić, że dla każdego $r \in R$ mamy $r + r = 0$. Dla dowolnego zbioru X znaleźć strukturę pierścienia Boole'a na zbiorze wszystkich podzbiorów X.