ALGEBRA 1B, Lista 11

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1.

1. Niech A będzie grupą przemienną i dla funkcji $\cdot : R \times A \to A$ niech $\phi : R \to A^A$ będzie zdefiniowane w następujący sposób $\phi(r)(a) := r \cdot a$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) A wraz z funkcją $\cdot : R \times A \to A$ jest R-modułem.

   (b) $\phi(R) \subseteq \mathrm{End}(A)$, $\phi(1) = \mathrm{id}_A$ i $\phi : R \to \mathrm{End}(A)$ jest homomorfizmem.

2. Udowodnić, że przekrój dowolnej rodziny ideałów (podpierścieni, podciał) R jest ideałem (podpierścieniem, podciałem) R.

3. Niech $I, J \trianglelefteq R$. Niech

   $$I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}, \ \sqrt{I} := \{a \in R : (\exists n \geqslant 1)(a^n \in I)\}.$$

   Udowodnić, że $I + J \trianglelefteq R$ oraz $\sqrt{I} \trianglelefteq R$.

4. Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni, $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq S$. Udowodnić, że:

   - $f^{-1}(J) \trianglelefteq R$.
   - Jeśli f jest epimorfizmem, to $f(I) \trianglelefteq S$.

5. Udowodnić, że jeśli R jest skończony, to jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest dziedziną.

6. Podać przykład pierścienia ideałów głównych R i podpierścienia $S \subseteq R$, takiego że S nie jest pierścieniem ideałów głównych.

7. Niech $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ będzie normą euklidesową, $I \trianglelefteq R$ i $a \in I$ będzie taki, że $v(a) = \min\{v(b) \mid b \in I \setminus \{0\}\}$. Udowodnić, że $I = (a)$.

8. Udowodnić, że ideał $(2, X) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$ nie jest główny.

9. Niech $\phi : R \to S$ będzie epimorfizmem pierścieni, gdzie R jest noetherowski. Udowodnić, że S jest też noetherowski.

10. Znaleźć podpierścień $R \subseteq \mathbb{Z}[X]$ taki, że R nie jest noetherowski.